Полиномиальная иерархия

Н. Н. Кузюрин С. А. Фомин

30 апреля 2015 г.

Основа полиномиальной иерархии

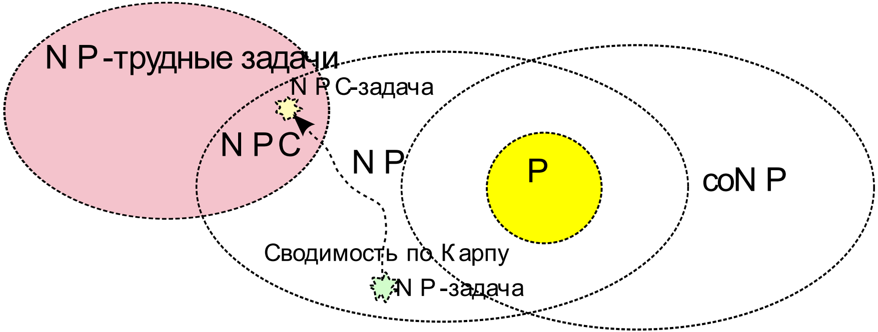
Определение

$$\mathcal{P} \equiv \cup_{k \geq 0} \mathcal{DTIME}(n^k).$$

Определение

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ *принадлежит классу* $\mathcal{NP}$*, если существуют полиномиальная детерминированная машина Тьюринга* M *и полином* $p(\cdot)$*, такие, что*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \ \exists\, y, \ |y| < p(|x|) \& \, \mathrm{M}(x, y) = 1\}.$$



N P -трудные задачи
N P C-задача
N P C
N P
P
coN P
Сводимость по Карпу
N P -задача

Определение

Класс сложности Σ_k^p состоит из всех языков L:

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists \tilde{L} \in \Pi_{k-1}^p \, \exists y \in \tilde{L}, \; |y| < p_k(|x|), \; x\#y \in \tilde{L}\}.$$

Класс сложности Π_k^p состоит из всех языков L:

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists \tilde{L} \in \Sigma_{k-1}^p \, \forall y \in \tilde{L}, \; |y| < p_k(|x|), \; x\#y \in \tilde{L}\}.$$

$$\Sigma_0^p \equiv \Pi_0^p \equiv \mathcal{P}$$

Сепульки

Сепульки — важный элемент цивилизации ардритов с планеты Энтеропия. См. Сепулькарии.

Категории: Основы | Lurkmore:Хорошие статьи | Lurkmore:Selfdescriptive

Сепулькарии

Сепулькарии — устройства для сепуления.

Категории: Основы | Lurkmore:Хорошие статьи | Lurkmore:Selfdescriptive

Сепуление

Сепуление — занятие ардритов с планеты Энтеропия. См. Сепульки.

Категории: Основы | Lurkmore:Хорошие статьи | Lurkmore:Selfdescriptive

Определение

Класс сложности Σ_k^p состоит из всех языков L:

$$L = \{x \in \Sigma^* : \ \exists\, \tilde{L} \in \Pi_{k-1}^p \ \exists\, y \in \tilde{L},\ |y| < p_k(|x|),\ \ x\#y \in \tilde{L}\}.$$

Класс сложности Π_k^p состоит из всех языков L:

$$L = \{x \in \Sigma^* : \ \exists\, \tilde{L} \in \Sigma_{k-1}^p \ \forall\, y \in \tilde{L},\ |y| < p_k(|x|),\ \ x\#y \in \tilde{L}\}.$$

$$\Sigma_0^p \equiv \Pi_0^p \equiv \mathcal{P}$$

Определение

Класс сложности Σ_k^p *состоит из всех языков L:*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists\, \tilde{L} \in \Pi_{k-1}^p\, \exists\, y \in \tilde{L},\ |y| < p_k(|x|),\ \ x\#y \in \tilde{L}\}.$$

Класс сложности Π_k^p *состоит из всех языков L:*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists\, \tilde{L} \in \Sigma_{k-1}^p\, \forall\, y \in \tilde{L},\ |y| < p_k(|x|),\ \ x\#y \in \tilde{L}\}.$$

$$\Sigma_0^p \equiv \Pi_0^p \equiv \mathcal{P}$$

Лемма

$$\mathcal{NP} = \Sigma_1^p$$

Определение

Класс сложности Σ_k^p состоит из всех языков L:

$$L = \{x \in \Sigma^* : \; \exists\, \tilde{L} \in \Pi_{k-1}^p \; \exists\, y \in \tilde{L}, \; |y| < p_k(|x|), \;\; x\#y \in \tilde{L}\}.$$

Класс сложности Π_k^p состоит из всех языков L:

$$L = \{x \in \Sigma^* : \; \exists\, \tilde{L} \in \Sigma_{k-1}^p \; \forall\, y \in \tilde{L}, \; |y| < p_k(|x|), \;\; x\#y \in \tilde{L}\}.$$

$$\Sigma_0^p \equiv \Pi_0^p \equiv \mathcal{P}$$

Лемма

$$\mathrm{co}\mathcal{NP} = \Pi_1^p$$

Лемма

$$\mathcal{NP} = \Sigma_1^p$$

Лемма

$$\mathcal{NP} = \Sigma_1^p$$

Лемма

$$\text{co}\mathcal{NP} = \Pi_1^p$$

Лемма

$$\mathcal{NP} = \Sigma_1^p$$

Лемма

$$\text{co}\mathcal{NP} = \Pi_1^p$$

Лемма

$\forall k,\ k \geq 0$

$$L \in \Sigma_k^p \iff \{0,1\}^* \setminus L \in \Pi_k^p\,.$$

Лемма

$$\mathcal{NP} = \Sigma_1^p$$

Лемма

$$\mathrm{co}\mathcal{NP} = \Pi_1^p$$

Лемма

$\forall k,\ k \geq 0$

$$L \in \Sigma_k^p \iff \{0,1\}^* \setminus L \in \Pi_k^p\,.$$

Лемма

$\forall k,\ k \geq 0$

$$\Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subseteq \Sigma_{k+1}^p \cap \Pi_{k+1}^p\,.$$

Лемма

$$\mathcal{NP} = \Sigma_1^p$$

Лемма

$$\text{co}\mathcal{NP} = \Pi_1^p$$

Лемма

$\forall k,\ k \geq 0$

$$L \in \Sigma_k^p \iff \{0,1\}^* \setminus L \in \Pi_k^p\,.$$

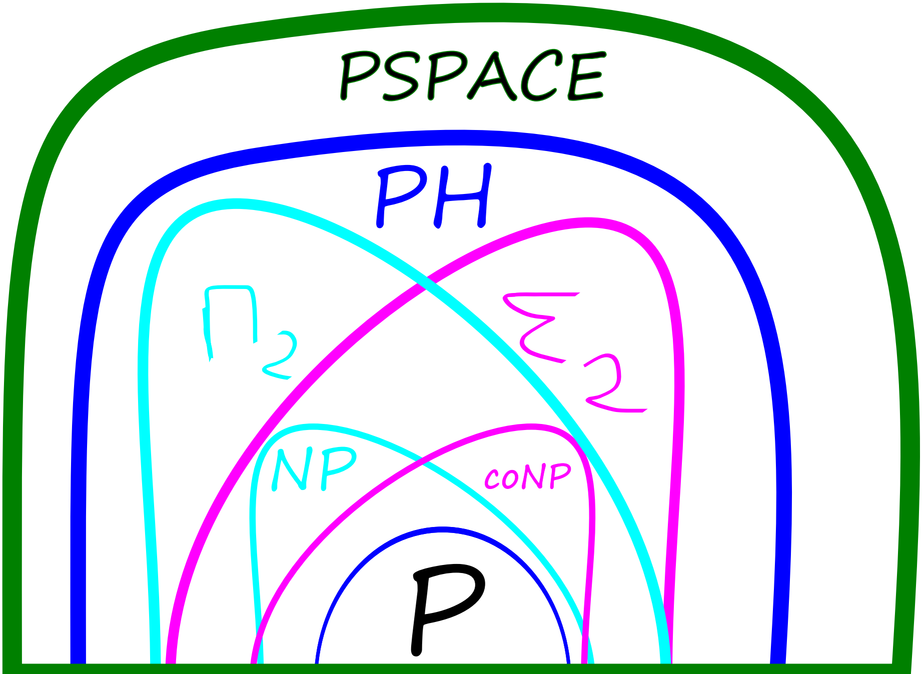
Лемма

$\forall k,\ k \geq 0$

$$\Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subseteq \Sigma_{k+1}^p \cap \Pi_{k+1}^p\,.$$

Определение

$$PH = \bigcup^{\infty} \Sigma_k^p = \bigcup^{\infty} \Pi_k^p\,.$$


PSPACE
PH
Π_2
Σ_2
NP
coNP
P

Определение

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ *принадлежит классу* Σ_k^p*, если существуют полиномиальная детерминированная машина Тьюринга* M *и полином* $p(\cdot)$*, такие, что*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \ \exists\, y_1, \forall\, y_2, \ \ldots Q_k y_k \quad |y_i| < p(|x|) \quad \mathrm{M}(x, y_1, \ \ldots, y_k) = 1\}.$$

Определение

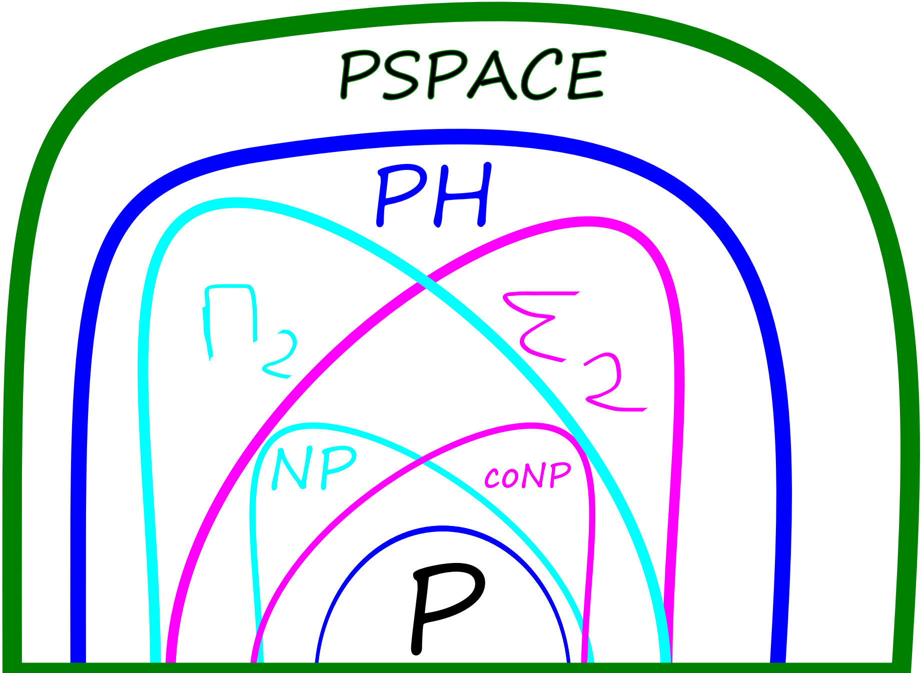
Язык $L \subseteq \Sigma^*$ *принадлежит классу* Σ_k^p*, если существуют полиномиальная детерминированная машина Тьюринга* M *и полином* $p(\cdot)$*, такие, что*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists\, y_1, \forall\, y_2, \ \ldots Q_k y_k \quad |y_i| < p(|x|) \quad \mathrm{M}(x, y_1, \ \ldots, y_k) = 1\}.$$

Определение

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ *принадлежит классу* Π_k^p*, если существуют полиномиальная детерминированная машина Тьюринга* M *и полином* $p(\cdot)$*, такие, что*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \forall\, y_1, \exists\, y_2, \ \ldots Q_k y_k \quad |y_i| < p(|x|) \quad \mathrm{M}(x, y_1, \ \ldots, y_k) = 1\}.$$



PSPACE
PH
Π_2
Σ_2
NP
coNP
P

Задача

$\mathrm{ExactTSP} = \{(G, B)\ :\ $ *G — взвешенный граф G с гамильтоновым путем длины B*$\}$

Задача

$\mathrm{ExactTSP} = \{(G, B)$: *G — взвешенный граф G с гамильтоновым путем длины $B\}$*

Лемма

$\mathrm{ExactTSP} \in \Sigma_2^p$

Определение

Длина КНФ *— число скобок.*

Определение

КНФ ***равносильны****, если реализуют одну формулу.*

Задача

MIN-CNF *— КНФ C — минимальна среди равносильных.*

Лемма

$\mathrm{MIN}-\mathrm{CNF} \in \Pi_2^p$

Упражнение

MAX-INDSET — ?

Определение

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ *принадлежит классу* Σ_k^p*, если существуют полиномиальная детерминированная машина Тьюринга* M *и полином* $p(\cdot)$*, такие, что*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \exists\, y_1, \forall\, y_2, \ \ldots Q_k y_k \quad |y_i| < p(|x|) \quad \mathrm{M}(x, y_1, \ \ldots, y_k) = 1\}.$$

Определение

$$\Sigma_i\text{--SAT} = \{\varphi \ : \exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \exists x_3 \ldots Q_i \bar{x}_i \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \bar{x}_i) = 1\}$$

Лемма

Σ_i–SAT — *полная задача в* Σ_i^p*,* $i \geq 0$*.*

Определение

Язык $L \subseteq \Sigma^*$ *принадлежит классу* Π_k^p, *если существуют полиномиальная детерминированная машина Тьюринга* M *и полином* $p(\cdot)$, *такие, что*

$$L = \{x \in \Sigma^* : \forall\, y_1, \exists\, y_2, \ \ldots Q_k y_k \ \ |y_i| < p(|x|) \ \ \mathrm{M}(x, y_1, \ \ldots, y_k) = 1\}.$$

Определение

$$\Pi_i\text{--SAT} = \{\varphi \ : \forall \bar{x}_1 \exists \bar{x}_2 \forall x_3 \ldots Q_i \bar{x}_i \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \bar{x}_i) = 1\}$$

Лемма

Π_i–SAT — *полная задача в* Π_i^p, $i \geq 0$.

О коллапсе полиномиальной иерархии

Большинство математиков верят в строгость включений:

$$\Sigma_0^p \subseteq \Sigma_1^p \subseteq \Sigma_2^p \subseteq \cdots \subseteq PSPACE$$

Гипотеза о коллапсе полиномиальной иерархии: начиная с некоторого уровня k,

$$\Sigma_k^p = PH$$

О полных задачах в полиномиальной иерархии

Теорема

Для каждого k существует язык полный в Σ_k^p относительно полиномиальной сводимости по Карпу.

Теорема

Если в PH существует полный язык относительно полиномиальной сводимости по Карпу, то для некоторого k $\Sigma_k^p = PH$.

Лемма

Если $P = NP$, то $P = PH$

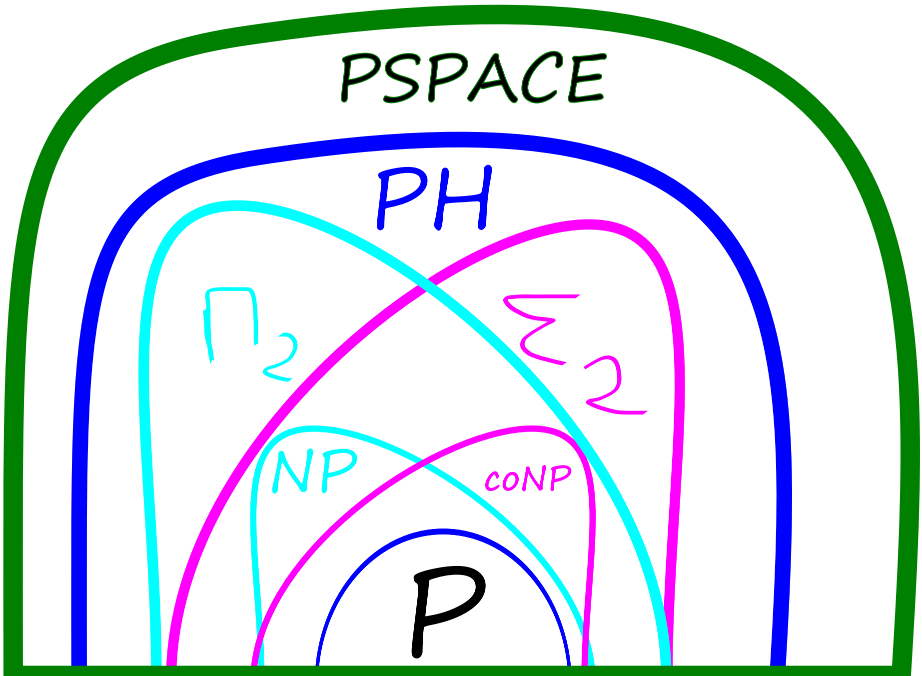
Задача

TQBF

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots Q_n x_n \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \stackrel{?}{\equiv} 1$$

Теорема

Существует полная в PSPACE задача относительно полиномиальной сводимости по Карпу.


PSPACE
PH
Π_2
Σ_2
NP
coNP
P

Классы сложности с оракулами

Машина Тьюринга с оракулом A это МТ с дополнительной оракульной лентой, куда она может записывать слова и за один такт работы проверять, принадлежит ли записанное на оракульной ленте слово языку A.

По двум сложностным классам C и L можно определить сложностной класс C^L таких языков, которые распознаются машинами из класса C с оракулами из L.

Примеры и задачи с оракулами

Упражнение

Если $C \in P$, то $P^C = P$.

Упражнение

$$NP \subseteq P^{NP}$$

Упражнение

$$P^{SAT} = P^{NP}$$

Упражнение

Покажите, что $P^{\Sigma_k^p} = P^{\Pi_k^p}$;

Упражнение

$$NP^{SAT} = \Sigma_2^p$$

Упражнение

$NP \cup co - NP \subseteq P^{NP}$

Упражнение

$P^{SAT} = P^{NP}$

Упражнение

$P^{\Sigma_k^p} = P^{\Pi_k^p}$;

Упражнение

$NP^{SAT} = \Sigma_2^p$

Упражнение

Для всех $k \geq 2$

$$\Sigma_k^p = NP^{\Sigma_{k-1}^p}$$

Полиномиальная иерархия через оракулы

Определение

$$\Delta_0^{\mathrm{P}} := \Sigma_0^{\mathrm{P}} := \Pi_0^{\mathrm{P}} := P$$

$$\Delta_{i+1}^{\mathrm{P}} := P^{\Sigma_i^{\mathrm{P}}}$$

$$\Sigma_{i+1}^{\mathrm{P}} := NP^{\Sigma_i^{\mathrm{P}}}$$

$$\Pi_{i+1}^{\mathrm{P}} := coNP^{\Sigma_i^{\mathrm{P}}}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \\
\Sigma_3^{\mathrm{P}} & & \Pi_3^{\mathrm{P}} \\
 & \Delta_3^{\mathrm{P}} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\Sigma_2^{\mathrm{P}} \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Pi_2^{\mathrm{P}} \arrow[uu] \arrow[ul] \\
 & \mathrm{P}^{\mathrm{NP}} = \Delta_2^{\mathrm{P}} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\mathrm{NP} = \Sigma_1^{\mathrm{P}} \arrow[uu] \arrow[ur] & & \Pi_1^{\mathrm{P}} = \mathrm{coNP} \arrow[uu] \arrow[ul] \\
 & \Delta_0^{\mathrm{P}} = \Sigma_0^{\mathrm{P}} = \mathrm{P} = \Pi_0^{\mathrm{P}} = \Delta_1^{\mathrm{P}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Упражнение

$NP \cup co-NP \subseteq P^{NP}$

Упражнение

$P^{SAT} = P^{NP}$

Упражнение

$P^{\Sigma_k^p} = P^{\Pi_k^p}$;

Упражнение

$NP^{SAT} = \Sigma_2^p$

Упражнение

Для всех $k \geq 2$

$$\Sigma_k^p = NP^{\Sigma_{k-1}^p}$$

Упражнение

$P^{BPP} =?$