$\mathcal{PCP}$ и неаппроксимируемость

Н. Н. Кузюрин С. А. Фомин

17 февраля 2011 г.

Определение

Алгоритм называется C-приближенным, если при любых исходных данных он находит допустимое решение со значением целевой функции, отличающимся от оптимума не более чем в C раз.

Для задач максимизации используют обратную величину: «$\frac{1}{C}$-приближенный алгоритм»

Например: «$0,878$-приближенный алгоритм нахождения максимального разреза в графе».

Сложность аппроксимации

- Сложность точного решения оптимизационных задач $\leftarrow$ Сложность задач разрешения («Да/Нет?»)

Сложность аппроксимации

- Сложность точного решения оптимизационных задач $\leftarrow$ Сложность задач разрешения («Да/Нет?»)
- Трудные задачи разрешения $\leftarrow \mathcal{NPC}$

Сложность аппроксимации

- Сложность точного решения оптимизационных задач $\leftarrow$ Сложность задач разрешения («Да/Нет?»)
- Трудные задачи разрешения $\leftarrow \mathcal{NPC}$
- Сложность аппроксимации $\leftarrow$?
- Можно ли аппроксимировать с произвольным заданным ε?
- Можно ли аппроксимировать с точностью $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{4}$? …

Сложность аппроксимации

- Сложность точного решения оптимизационных задач $\leftarrow$ Сложность задач разрешения («Да/Нет?»)
- Трудные задачи разрешения $\leftarrow \mathcal{NPC}$
- Сложность аппроксимации $\leftarrow$ **?**
- Можно ли аппроксимировать с произвольным заданным ε?
- Можно ли аппроксимировать с точностью $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{4}$? …

На эти вопросы не было ответа до доказательства $\mathcal{PCP}$-теоремы и изучения ее следствий.

Аппроксимация «MAX-SAT»

Задача

Максимальная выполнимость/MAX-SAT*.*
Даны m скобок конъюнктивной нормальной формы (КНФ) с n переменными. Найти значения переменных, максимизирующие число выполненных скобок.

Задача

«MAX-SAT (ε)».
Задача ε-разрешения для задачи 6 «MAX-SAT». Известно, что для данного $\varepsilon > 0$:

- *либо доля невыполненных скобок в КНФ не меньше ε,*
- *либо КНФ выполнима.*

Определить, какая ситуация имеет место.

$\mathcal{PCP}$-система

Определение

Системой вероятностной проверки доказательств (верифицирующей $\mathcal{PCP}$-системой) для языка L называется ВМТ M *с оракулом, для которой выполняются следующие условия:*

полнота (*completeness*): $\forall x \in L$ *существует оракул* π_x*:*

$$\mathsf{P}[\mathsf{M}^{\pi_x}(x) = 1] = 1.$$

корректность (*soundness*): $\forall x \notin L$ *и для любого оракула* π*:*

$$\mathsf{P}[\mathsf{M}^{\pi}(x) = 1] \leq \frac{1}{2}.$$

Класс $\mathcal{PCP}$

Определение

Пусть $r, q : N \Rightarrow N$ *— неотрицательные целочисленные функции. Класс сложности* $\mathcal{PCP}(r(\cdot), q(\cdot))$ *состоит из языков, имеющих верифицирующую* $\mathcal{PCP}$*-систему, которая на входе* x*:*

1. *потребляет не более* $r(|x|)$ *случайных бит;*
2. *делает не более* $q(|x|)$ *запросов к оракулу.*

Для множеств целочисленных функций R*,* Q *определим*

$$\mathcal{PCP}(R, Q) \equiv \bigcup_{r \in R, q \in Q} \mathcal{PCP}(r(\cdot), q(\cdot)).$$

Задача

«MAX-3SAT(ε)».
Частный случай задачи 2, в которой в каждой скобке-дизъюнкции не более трех переменных.

- Для любого ли $\varepsilon > 0$ существует $\frac{1}{1-\varepsilon}$–приближенный полиномиальный алгоритм для задачи 3 «MAX-3SAT(ε)»?
- Можно ли, при построении $\mathcal{PCP}$-системы для задачи 3 «MAX-3SAT(ε)»:
  1. вероятностно выбирать одну дизъюнкцию,
  2. проверять с помощью оракула ее выполнимость,
  3. и в случае, когда она выполнена, чтобы вероятность невыполнимости всей формулы уменьшилась на константу?

Определение

Усиливающая сводимость *(amplifying reduction) по сведению произвольного языка $L \in \mathcal{NP}$ к языку $3SAT (\in \mathcal{NPC})$ для заданной константы $0 < \varepsilon < 1$ есть полиномиально вычислимая функция $\phi = f(x)$, преобразующая входное слово x в экземпляр (формулу ϕ) задачи $3SAT$, для которой*

$$
\begin{aligned}
x \in L &\iff \phi \in 3SAT, \\
x \notin L &\iff \phi \notin 3SAT,
\end{aligned}
$$

причем если $\phi \notin 3SAT$, то доля невыполненных (ложных) дизъюнкций будет не меньше ε.

Теорема

$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(log, O(1)) \iff$
Есть усиливающая сводимость для $3SAT$.

$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(log, O(1)) \implies$ Есть УС для $3SAT$.

$\exists \mathcal{PCP}(log, O(1))$-система для $L \in \mathcal{NP}$.
Показем $\exists$УС : $x \in L \to \phi \in 3SAT$.

Для x:

- полиномиальный набор случайных строк r_i, $1 \leq i \leq m$,

$$m = 2^{r(|x|)} = 2^{\log(|x|)} = poly(|x|).$$

- $\forall r_i$: $\langle \pi_1^i, \ \ldots, \pi_t^i \rangle$ — ответы оракула.

Строим КНФ ψ_i (решение верификатора на r_i) от t переменных $\langle \pi_1^i, \ \ldots, \pi_t^i \rangle$: различных дизъюнкций $\leq 2^t$.

Преобразуем КНФ ψ_i в 3-КНФ ϕ_i: число 3-дизъюнкций $\leq t \cdot 2^t$.

$$\phi \equiv \wedge_{i=1}^m \phi_i$$

$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(log, O(1)) \Longrightarrow$ Есть УС для $3SAT$.

$x \in L \Rightarrow \exists \pi, \forall i \left\langle \pi_1^i, \ \dots, \pi_t^i \right\rangle$ убеждают проверяющую ВМТ $\Rightarrow$ $\left\langle \pi_1^i, \ \dots, \pi_t^i \right\rangle$ (+значения вспомогательных переменных) выполняющий набор для $\phi \Rightarrow \phi \in 3SAT$.

$x \notin L \Rightarrow$

- $\forall \pi$ для половины r_i M «бракует» x

$\Rightarrow$ невыполнимо не менее половины ϕ_i

$\Rightarrow$ число невыполненных дизъюнкций $\geq \frac{m}{2}$.

Доля невыполненных дизъюнкций:

$$\frac{\frac{m}{2}}{m \cdot t \cdot 2^t} = \frac{1}{t \cdot 2^{t+1}} = \varepsilon$$

$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(log, O(1)) \Longleftarrow \exists$ усиливающая сводимость

$\exists\ \varepsilon$-усиливающая сводимость $f : 3SAT \to 3SAT$.

Построим $\mathcal{PCP}$-систему для $3SAT$ (ϕ — проверяемое слово).

1. $\phi' = f(\phi)$
2. случайно-равномерно выбираем $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ дизъюнкций ϕ'
3. $\leq \lceil \frac{3}{\varepsilon} \rceil$ вопросов: «какие значения присвоить для выполнимости?»,
4. Конъюнкция из выбранных дизъюнкций: «0» — бракуем,«1» — принимаем.

$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{PCP}(log, O(1)) \Longleftarrow \exists$ усиливающая сводимость

$\exists$ ε-усиливающая сводимость $f : 3SAT \to 3SAT$.

Построим $\mathcal{PCP}$-систему для $3SAT$ (ϕ — проверяемое слово).

1. $\phi' = f(\phi)$
2. случайно-равномерно выбираем $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ дизъюнкций ϕ'
3. $\leq \lceil \frac{3}{\varepsilon} \rceil$ вопросов: «какие значения присвоить для выполнимости?»,
4. Конъюнкция из выбранных дизъюнкций: «0» — бракуем,«1» — принимаем.

- ϕ' выполнима $\Rightarrow$ подходящий оракул покажет как выполнить выбранные дизъюнкции $\Rightarrow$ «1» («completeness»).
- ϕ' невыполнима $\Rightarrow$ вероятность того, что мы $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ раз не угадаем ни одну невыполненную дизъюнкцию, будет не больше

$$(1-\varepsilon)^{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}.$$

т. е. выполнено и «soundness»-условие.

Теорема

Задача 3 («правда ли, что есть присваивание, при котором данная 3КНФ-формула ϕ имеет долю невыполненных конъюнкций не более ε?») $\mathcal{NP}$-трудна.

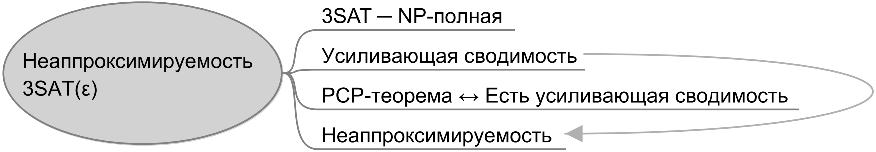
Доказательство.

Возьмем 3-КНФ ϕ и через ε-УС $\to \phi^{\varepsilon}$.

Решив задачу 3 для ϕ^{ε}, мы решаем «$\phi \overset{?}{\in} 3SAT$». $\square$

Таким образом, для $3SAT$ доказано, что аппроксимация ее с произвольным ε не менее трудная задача, чем ее точное решение.

«Карта памяти» лекции



Смотр известных нам задач!

Верхние оценки — Лучшая аппроксимация

Нижние оценки — Увы, лучше не будет, пока $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$

$$\mathcal{FPTAS} \subset \mathcal{PTAS} \subset \mathcal{APX} \subset \mathcal{NPO}$$

Задача

«Минимальное вершинное покрытие»[a].
Дан неориентированный граф $G = (V, E)$ *(множество вершин V, множество ребер E). Найти вершинное покрытие минимальной мощности.*

[a] В англоязычной литературе — *Min Vertex Covering*.

$$2 - \frac{\log\log|V|}{2\log|V|} \text{ и } 2 - \frac{2\ln\ln|V|}{\ln|V|}(1 - o(1))$$

1.1666

Задача

«Покрытие множества»[a].

- *Множество* X, $|X| = m$.
- *Семейство подмножеств* $\{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_j \subseteq X$.
- $X = \cup_{j=1}^{n} S_j$ *(покрытие гарантировано).*

Найти минимальное по мощности множество подмножеств, покрывающее X*:*

$$
\begin{aligned}
&|J| \to \min, \\
&J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \\
&X = \cup_{j \in J} S_j.
\end{aligned}
$$

[a] В англоязычной литературе — *Set Cover*.

 $1 + \ln m$

 $c \log m$ для некоторого c

Задача

Максимальная выполнимость/MAX-SAT.
Даны m скобок конъюнктивной нормальной формы (КНФ) с n переменными. Найти значения переменных, максимизирующие число выполненных скобок.

1.2987

$\mathcal{APX}$-complete

Задача

«Коммивояжер», «TSP[a]». Заданы неориентированный граф из n вершин-городов, и $d_{ij} \equiv d(v_i, v_j)$ — положительные целые расстояния между городами.
Чему равна наименьшая возможная длина гамильтонова цикла (кольцевого маршрута, проходящего по одному разу через все города)?
т. е. нужно найти минимально возможное значение суммы

$$\min_{p \in \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ . & . & . & . \end{pmatrix}} \sum_{i=1}^{n-1} d_{p_i, p_{i+1}} + d_{p_n, p_1}, \tag{1}$$

где минимум берется по всем перестановкам p чисел $1, \dots, n$.

[a] В англоязычной литературе — Traveling Salesman Problem.

$\mathcal{NPO}$-complete

Задача

«Упаковка» (Packing)
Дано конечное множество L из m элементов и система его подмножеств S_1, …, S_n. Требуется найти максимальную по числу подмножеств подсистему попарно непересекающихся подмножеств.

$$O\left(n/(\log n)^2\right)$$

$$n^{1/2-\varepsilon} \quad \forall\varepsilon > 0$$

Интернет поддержка курса

http://discopal.ispras.ru/

Вопросы?