Алгоритм A_1: Три раза применяем алгоритм $A(x)$, затем если все результаты a_1, a_2, a_3 различны, то равновероятно выдаем в качестве ответа любой из результатов, а если среди a_1, a_2, a_3 есть совпадения, то в качестве ответа говорим тот ответ который встретился среди a_1, a_2, a_3 больше одного раза.

Алгоритм A_1 даст результат $P(A_1(x_0) = f(x_0)) = \hat{p}$, где $\hat{p} > p = P(A(x_0) = f(x_0))$. Тогда проделов аналогичную опирацию с алгоритмом A_1 мы получим новый, более «полезный» алгоритм A_2. И так далее. Мы сможем сколь угодно приблизиться к $p = 1$.

Теперь обоснуем все вышесказенное.

$$\hat{p} = P(A_1(x_0) = f(x_0)) = p^3 + 3p^2(1-p) + 3(p(1-p)^2 - \sum_{w_i} pq_i^2)\frac{1}{3} = p(1 + p - p^2 - \sum_{w_i} q_i^2),$$

где $\{w_i\}$ — множество значений $A(x_0)$ не равных $f(x_0)$, а $q_i = P(A(x_0) = w_i$. Аналогично

$$P(A_1(x_0) = w_1) = q_1^3 + 3q_1^2(1-q_1) + 3(q_1(1-q_1)^2 - \sum_{w_i, i \neq 1} q_1 q_i^2 - q_1 p^2)\frac{1}{3} = q_1(1 + q_1 - q_1^2 - p^2 - \sum_{w_i, i \neq 1} q_i^2).$$

Тогда имеем, что $\hat{p}/\hat{q} > p/q$. Для алгоритма A_1 выполнено $p/q \geq \frac{4}{3}$, тогда для всех последующих алгоритмов A_j выполнено это соотношение.

Теперь покажем, что $\hat{p} > p$ для любого $\frac{1}{3} \leq p < 1$.

- $\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{5}$
  Максимум суммы $\sum\limits_{w_i} q_i^2$ при условии, что $\sum\limits_{w_i} q_i = 1 - p$ и $0 < q_i \leq \frac{1}{4}$, достигается при $q_1 = q_2 = \frac{3}{4}p, q_3 = 1 - \frac{5}{2}p$.
  $\hat{p} = p(1 + p - p^2 - \sum\limits_{w_i} q_i^2) \geq p(6p - \frac{67}{8}p^2) \geq \frac{53}{50}$.

- $\frac{2}{5} \leq p \leq \frac{4}{7}$
  Максимум суммы $\sum\limits_{w_i} q_i^2$ при условии, что $\sum\limits_{w_i} q_i = 1 - p$ и $0 < q_i \leq \frac{1}{4}$, достигается при $q_1 = \frac{3}{4}p, q_2 = 1 - \frac{7}{4}p$.
  $\hat{p} = p(1 + p - p^2 - \sum\limits_{w_i} q_i^2) \geq \frac{53}{50}$.

- $\frac{4}{7} \leq p < 1$
  Максимум суммы $\sum\limits_{w_i} q_i^2$ при условии, что $\sum\limits_{w_i} q_i = 1 - p$ и $0 < q_i \leq \frac{1}{4}$, достигается при $q_1 = 1 - p$.
  $\hat{p} = p(1 + p - p^2 - \sum\limits_{w_i} q_i^2) > 1$.