MAX-CUT: вероятностное округление/Задачи/Детерминированный 2-приближенный алгоритм для задачи MAX-CUT

Целых Влада, 974 группа

12 декабря 2014 г.

Формулировка задачи Предложите детерминированный 2-приближенный полиномиальный алгоритм для задачи MAX-CUT.

Решение Дан неориентированный граф $G = (V, E)$ с весами $w_e > 0$. Необходимо найти разрез (S, T) с максимальным весом $R(S, T)$.

Детерминированный 2-приближенный полиномиальный алгоритм: сначала $S = \{v_1\}, T = \{v_2\}$. Каждую следующую вершину относим ко множеству, сумма весов ребер до вершин которого минимальна, т.е. если $\sum_{e \in E(S,v)} w_e > \sum_{e \in E(T,v)} w_e$, то $T = T \cup \{v\}$, иначе $S = S \cup \{v\}$.

На каждой итерации работы алгоритма выполняется:

$$\sum_{e \in E(S,T)} w_e \geq \sum_{e \in E(S,S)} w_e + \sum_{e \in E(T,T)} w_e \tag{1}$$

в силу того, что в начале работы алгоритма это верно ($w_{(v_1,v_2)} \geq 0$), а добавление вершины, например, ко множеству S приводит к:

$$\sum_{e \in E(S \cup \{v\},T)} w_e = \sum_{e \in E(S,T)} w_e + \sum_{e \in E(v,T)} w_e \geq \sum_{e \in E(S,S)} w_e + \sum_{e \in E(T,T)} w_e +$$
$$+ \sum_{e \in E(v,S)} w_e = \sum_{e \in E(S \cup v, S \cup v)} w_e + \sum_{e \in E(T,T)} w_e,$$

что и утверждалось.

Из (1) следует, что

$$2 \cdot \sum_{e \in E(S,T)} w_e \geq \sum_{e \in E(S,T)} w_e + \sum_{e \in E(S,S)} w_e + \sum_{e \in E(T,T)} w_e = \sum_{e \in E} w_e \geq OPT,$$

где OPT-оптимальное решение задачи. Таким образом, предложенный алгоритм является 2-приближенным.