Полиномиальный в среднем алгоритм для «Рюкзака»

Н. Н. Кузюрин С. А. Фомин

18 февраля 2011 г.

Лекция основана на результатах из: «Beier, R. and Vöcking, B. (2003). In *Proceedings of the 35th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 232–241».

Полиномиальность в среднем

Определение

«Полиномиальный в среднем (точно)»
*Алгоритм A называется **полиномиальным в среднем**, если среднее время его работы ограничено полиномом от длины входа, т. е.*

$$\exists C > 0 : \quad \mathbf{E}_n\, T_A = O(n^C).$$

Упражнение

Найдите T_A, время работы некоторого A, и входное распределение $\mathrm{P}_n(I)$, что $\mathbf{E}_n\, T_A = O(n^C)$, но $\mathbf{E}_n\, T_A^2 \neq O(n^C)$.

Определение

«Полиномиальный в среднем»
*Алгоритм называется **полиномиальным в среднем**, если для времени работы алгоритма T выполняется:*

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \mathbf{E}_n\, T^{\varepsilon} = O(n).$$

Задача о рюкзаке

Задача

«0–1 Рюкзак (Knapsack)»
Даны:

$c_1, \ \ldots, c_n, c_j \in N$ — *«стоимости» предметов;*

$a_1, \ \ldots, a_n, a_j \in N$ — *«размеры» или «веса»;*

$B \in N$ — *«размер рюкзака».*

Найти максимальное значение f^* целевой функции

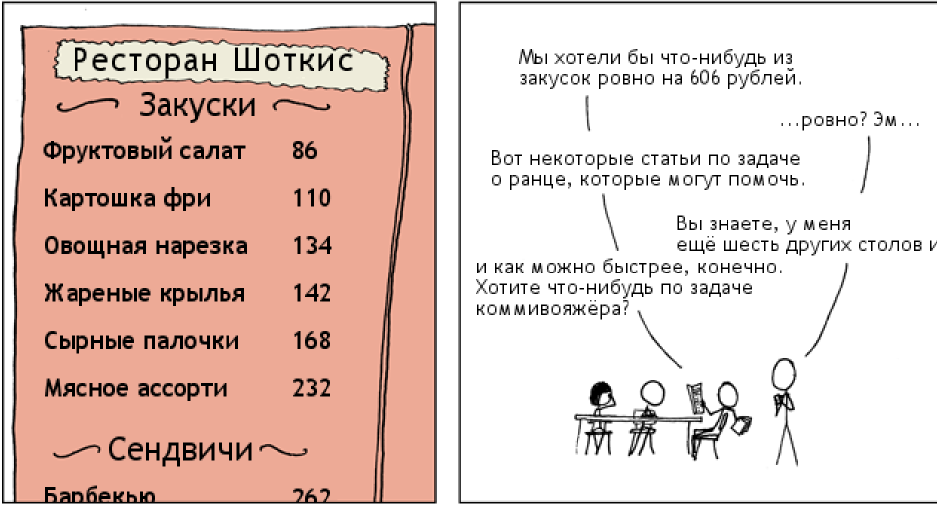
$$f \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

с ограничением на размер «рюкзака»:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq B, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Моё хобби:

встраивать NP-полные задачи в ресторанные заказы.



Парето-оптимальные решения

Определение

Пусть S_1 и S_2 допустимые подмножества предметов для задачи 1. S_1 ***доминирует*** *над S_2, если:*

- *стоимость S_1 больше стоимости S_2,*
- *вес S_1 не больше веса S_2.*

т. е. набор доминирующих подмножеств есть набор *Парето-оптимальных* решений, т. е. таких решений, в которых нельзя улучшить один параметр (стоимость), без ухудшения другого параметра (увеличения веса).

Алгоритм Немхаузера – Ульмана

```python
def KnapsackNemhauserUllman(items, B):
    pareto = [ItemSet()] # Парето-оптимальные по весу
    for item in items:
        news = []
        for solution in pareto:
            if solution.weight + item.weight <= B:
                news.append(solution + item)
        mergedItemSet = merge_item_sets(pareto, news)
        pareto = mergedItemSet
    return pareto[-1], len(pareto)
```

Слияние доминирующих решений

```python
def merge_item_sets(s1, s2): # Слияние списков доминирующих решений
    i = j = 0   #можем считать, что входные списки непусты.
    res = []
    while i <= len(s1) or j <= len(s2):    #пока не дошли до конца
        if i == len(s1):
            res += s2[j:]     # забираем остаток второго списка
            break
        if j == len(s2):
            res += s1[i:]     # забираем остаток первого списка
            break

        if s1[i].weight <= s2[j].weight:
            if s1[i].cost > s2[j].cost:
                j += 1
            else:
                res.append(s1[i])
                i += 1
        else:
            if s1[i].cost < s2[j].cost:
                i += 1
            else:
                res.append(s2[j])
                j += 1
    return res
```

Алгоритм Немхаузера – Ульмана

Предметы ($\frac{\text{стоимость}}{\text{вес}}$): $[\frac{6}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}, \frac{6}{8}]$, $B = 10$

pareto	**news**	**mergedItemSet**
$[\frac{0}{0}]$	$[\frac{6}{3}]$	$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}]$
$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}]$	$[\frac{3}{4}, \frac{9}{7}]$	$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{7}]$
$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{7}]$	$[\frac{2}{5}, \frac{8}{8}]$	$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{7}]$
$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{7}]$	$[\frac{3}{3}, \frac{9}{6}, \frac{12}{10}]$	$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{6}, \frac{9}{7}, \frac{12}{10}]$
$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{6}, \frac{9}{7}, \frac{12}{10}]$	$[\frac{6}{8}]$	$[\frac{0}{0}, \frac{6}{3}, \frac{9}{6}, \frac{9}{7}, \frac{12}{10}]$

Оптимальное решение: $\frac{12}{10}$

Алгоритм Немхаузера – Ульмана

```
def KnapsackNemhauserUllman(items, B):
    pareto = [ItemSet()] # Парето-оптимальные по весу
    for item in items:
        news = []
        for solution in pareto:
            if solution.weight + item.weight <= B:
                news.append(solution + item)
        mergedItemSet = merge_item_sets(pareto, news)
        pareto = mergedItemSet
    return pareto[-1], len(pareto)
```

Сложность алгоритма — $O(n \cdot |\text{ParetoSolutions}|)$.

Мат. ожидание сложности алгоритма полиномиально

Теорема

Пусть:

a_i — *«веса», произвольные положительные числа;*

c_i — *«стоимости», независимые случайные величины, равномерно распределенные на* $[0,1]$*;*

$q = \max |ParetoSolutions|$ — *число доминирующих подмножеств для всех n предметов.*

Тогда

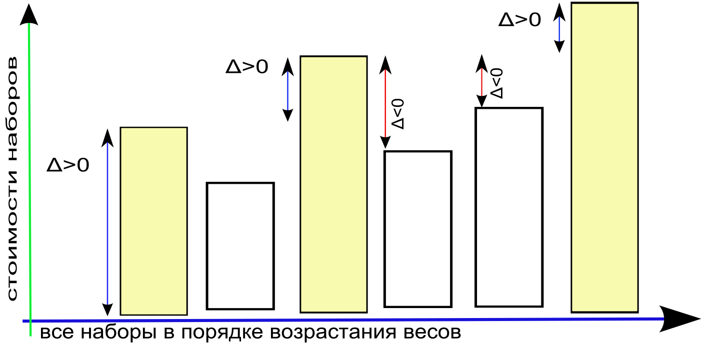
$$\mathbf{E}(q) = O(n^3).$$

Определения

- $m = 2^n$
- $S_1, \ldots, S_m$ — подмножества $[n]$ в порядке неубывания весов.

Сами веса $\sum_{i \in S_k} a_i$ множеств S_k в нашей теме не возникают.
Стоимости подмножеств: $C_k = \sum_{i \in S_k} c_i$.

Определения

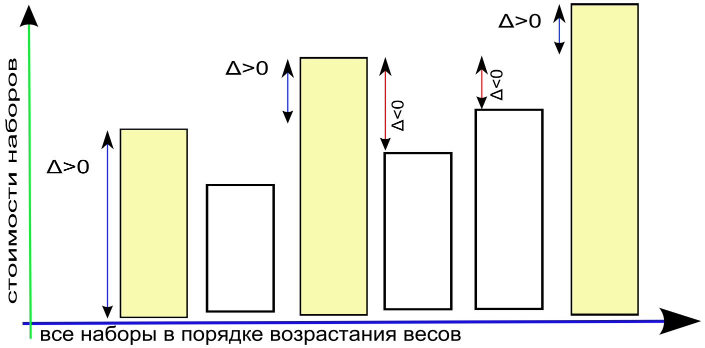


Для любых $2 \le u \le m$, $1 \le k \le u$:

$$Plus_k = S_u \setminus S_k \qquad Minus_k = S_k \setminus S_u$$

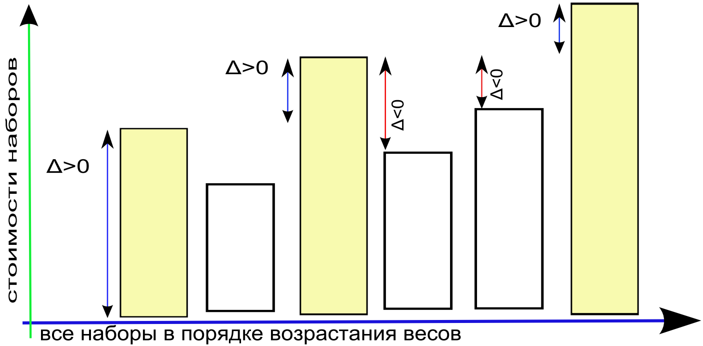
$$\Delta_k^+ = \sum_{i \in Plus_k} c_i \qquad \Delta_k^- = \sum_{i \in Minus_k} c_i$$

$$\Delta_u = \min_{1 \le k < u} (\Delta_k^+ - \Delta_k^-)$$



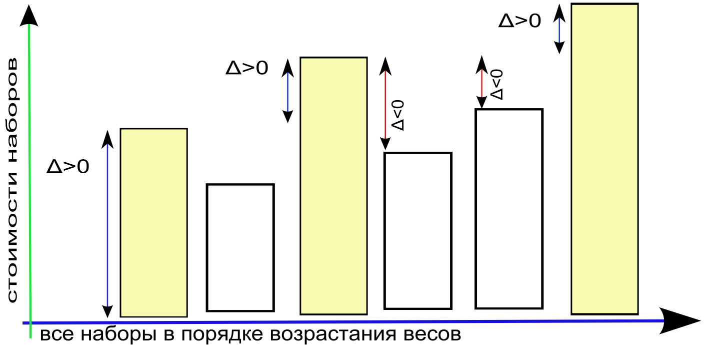
- Стоимость $S_m \leq n$
- В среднем: чем больше $\Delta_u > 0$ для каждого доминирующего набора $u \to$ тем меньше q.

План



1. оценим вероятность «неблагоприятных» событий: небольшой прирост $\Delta_u > 0$;
2. оценим снизу $\mathbf{E}\,\Delta_u > 0$;
3. оценим $\mathbf{E}\,q = \mathbf{E}\,|ParetoSolutions|$.

План



Обозначим мат. ожидание стоимости S_m через C_m. Имеем две оценки:

$$C_m = \begin{cases} n \cdot \mathbf{E}(c_i) = \frac{n}{2} \\ \sum_{u=2}^{m} \mathsf{P}(\Delta_u > 0)\, \mathbf{E}(\Delta_u | \Delta_u > 0) \geq \frac{1}{O(n^2)} \sum_{u=2}^{m} \mathsf{P}(\Delta_u > 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(q) = 1 + \sum_{u=2}^{m} \mathsf{P}(\Delta_u > 0) \leq 1 + \frac{n}{2} \cdot O(n^2) = O(n^3)$$

События

Некоторое $u \geq 2$.

Пусть $S_u = [1, \ \ldots, t]$ (иначе перенумеруем).

$$\forall\, 1 \leq k < u \;\; Plus_k \subseteq [1, \ \ldots, t], \; Minus_k \subseteq [t+1, \ \ldots, n]$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$.

События

$$\begin{aligned}
\text{ПаретоНабор} &= \{\Delta_u > 0\} \\
\text{ДельтаМала} &= \left\{\Delta_u < \varepsilon^2\right\} \\
\text{ЭлементМал}_j &= \{c_j < \varepsilon\} \\
\text{ЭлементНеМал}_j &= \overline{\text{ЭлементМал}}_j = \{c_j \geq \varepsilon\} \\
\text{ВНабореНеМалы} &= \textstyle\bigcap_{j=1}^{t} \text{ЭлементНеМал}_j
\end{aligned}$$

Детальный план

$$\Delta_u > 0$$

$$\mathsf{P}(\exists_{\text{малый}}) \leq n\varepsilon$$

$$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon \mid \nexists_{\text{малый}}) \leq n\varepsilon$$

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B \cap C) \cdot \ldots$$

$$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon) \leq 2n\varepsilon$$

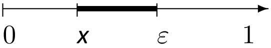
$$\mathbf{E}(q) = O(n^3)$$

$\mathsf{P}\left(\overline{\text{ВНабореНеМалы}}\middle|\text{ПаретоНабор}\right) \leq n\varepsilon$

$\forall j \leq t$ и $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(c_j < \varepsilon \middle| \forall k : \Delta_k^+ > \Delta_k^-\right) &= \mathsf{P}\left(c_j < \varepsilon \middle| c_j > x\right) \\
&\leq \begin{cases} \text{при } x \geq \varepsilon: & 0 \\ \text{при } x < \varepsilon: & \frac{\varepsilon - x}{1 - x} = \frac{\varepsilon(1-x)}{1-x} - \frac{x(1-\varepsilon)}{1-x} \end{cases} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$\mathsf{P}(c_j < \varepsilon | c_j > x)$



$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\overline{\text{ВНабореНеМалы}}\middle|\text{ПаретоНабор}\right) &= \mathsf{P}\left(\cup_{j=1}^{t} \text{ЭлементМал}_j \middle| \text{ПаретоНабор}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{t} \mathsf{P}\left(\text{ЭлементМал}_j \middle| \text{ПаретоНабор}\right) \\
&\leq t \cdot \varepsilon \leq n\varepsilon.
\end{aligned}$$

Детальный план

$$\Delta_u > 0$$

$$\mathsf{P}(\exists_{\text{малый}}) \leq n\varepsilon$$

$$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon \mid \nexists_{\text{малый}}) \leq n\varepsilon$$

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B \cap C) \cdot \ldots$$

$$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon) \leq 2n\varepsilon$$

$$\mathbf{E}(q) = O(n^3)$$

$\mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор} \wedge \text{ВНабореНеМалы}\right) \leq n\varepsilon$

Оценим $\mathsf{P}(\text{ПаретоНабор})$ при априорности событий (при условии):
«$\forall j\ c_j \in [0,1]$», «ВНабореНеМалы» (и, следовательно, «$\Delta_k^+ \geq \varepsilon$»):

$$\mathsf{P}\left(\text{ПаретоНабор} \middle| \text{ВНабореНеМалы}\right) = \mathsf{P}\left(\forall k\, \Delta_k^- \leq \Delta_k^+,\ \forall j > t\, c_j \in [0,1]\right) =$$

$$= \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n-t}} \mathsf{P}\left(\forall k\, \Delta_k^- \leq (1-\varepsilon)\,\Delta_k^+,\ \forall j > t\, c_j \in [0, 1-\varepsilon]\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n-t}} \mathsf{P}\left(\forall k\, \Delta_k^- \leq \Delta_k^+ - \varepsilon^2,\ \forall j > t\, c_j \in [0, 1-\varepsilon]\right) \leq$$

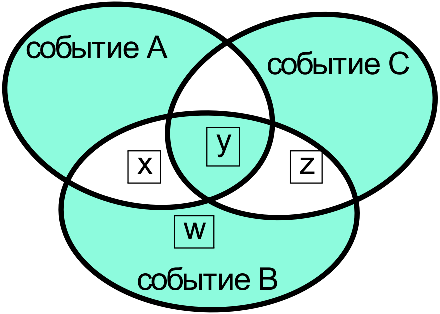
$$\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n-t}} \mathsf{P}\left(\overline{\text{ДельтаМала}} \middle| \text{ВНабореНеМалы}\right)$$

С другой стороны, $\overline{\text{ДельтаМала}} \subset \text{ПаретоНабор}$, и

$$\mathsf{P}\left(\overline{\text{ДельтаМала}} \middle| \text{ПаретоНабор} \wedge \text{ВНабореНеМалы}\right) =$$

$$= \frac{\mathsf{P}\left(\overline{\text{ДельтаМала}} \middle| \text{ВНабореНеМалы}\right)}{\mathsf{P}\left(\text{ПаретоНабор} \middle| \text{ВНабореНеМалы}\right)} \geq (1-\varepsilon)^{n-t} \geq (1-\varepsilon)^n \geq 1 - n\varepsilon$$

$$\boxed{\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B \cap C) \cdot \mathrm{P}(C|B) + \mathrm{P}(A|B \cap \overline{C}) \cdot \mathrm{P}(\overline{C}|B)}$$



$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{x+y}{x+y+z+w}$$

$$\mathrm{P}(A|B \cap C) \cdot \mathrm{P}(C|B) = \\ = \frac{y}{y+z} \cdot \frac{y+z}{x+y+z+w}$$

$$\mathrm{P}(A|B \cap \overline{C}) \cdot \mathrm{P}(\overline{C}|B) = \\ = \frac{x}{x+w} \cdot \frac{x+w}{x+y+z+w}$$

Детальный план

$\Delta_u > 0$

$\mathsf{P}(\exists_{\text{малый}}) \leq n\varepsilon$

$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon \mid \nexists_{\text{малый}}) \leq n\varepsilon$

$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B \cap C) \cdot \ldots$

$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon) \leq 2n\varepsilon$

$\mathbf{E}(q) = O(n^3)$

$\mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор}\right) \leq 2n\varepsilon$

$$\boxed{\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B \cap C) \cdot \mathsf{P}(C|B) + \mathsf{P}(A|B \cap \overline{C}) \cdot \mathsf{P}(\overline{C}|B)}$$

Оценим $\mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор}\right)$:

P ДельтаМалаПаретоНабор

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор}\right) = \\
&\quad = \mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор} \bigcap \text{ВНабореНеМалы}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\text{ВНабореНеМалы} \middle| \text{ПаретоНабор}\right) \\
&\quad + \mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор} \bigcap \overline{\text{ВНабореНеМалы}}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\overline{\text{ВНабореНеМалы}} \middle| \text{ПаретоНабор}\right) \\
&\quad \leq \mathsf{P}\left(\text{ДельтаМала} \middle| \text{ПаретоНабор} \bigcap \text{ВНабореНеМалы}\right) + \mathsf{P}\left(\overline{\text{ВНабореНеМалы}} \middle| \text{ПаретоНабор}\right) \\
&\qquad \leq n\varepsilon + n\varepsilon = 2n\varepsilon
\end{aligned}$$

Детальный план

$$\Delta_u > 0$$

$$\mathsf{P}(\exists_{\text{малый}}) \le n\varepsilon$$

$$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon \mid \nexists_{\text{малый}}) \le n\varepsilon$$

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B \cap C) \cdot \ldots$$

$$\mathsf{P}(\Delta < \varepsilon) \le 2n\varepsilon$$

$$\mathbf{E}(q) = O(n^3)$$

$\mathbf{E}(q) = O(n^3)$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3n}$, тогда

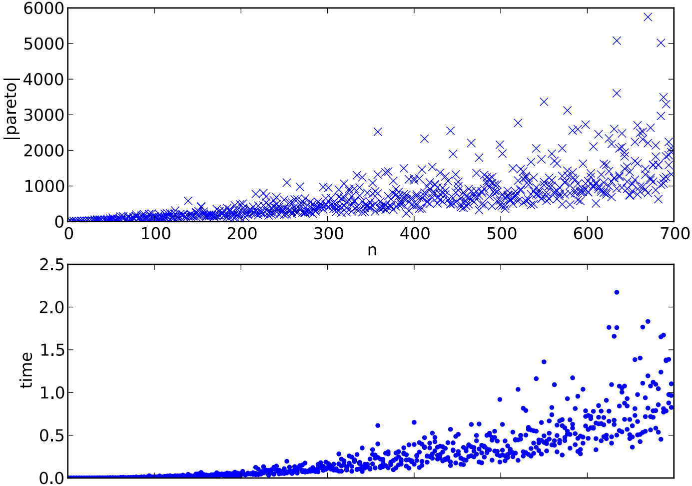
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\Delta_u|\Delta_u > 0) &\geq \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}(\Delta_u > \varepsilon^2|\text{ПаретоНабор}) \\ &= \varepsilon^2 \cdot (1 - \mathsf{P}[\text{ДельтаМала}|\text{ПаретоНабор}]) \\ &\geq \varepsilon^2 \cdot (1 - 2n\varepsilon) = \frac{1}{9n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27n^2}\end{aligned}$$

Обозначим мат. ожидание стоимости S_m через C_m. Имеем две оценки:

$$C_m = \begin{cases} n \cdot \mathbf{E}(c_i) = \frac{n}{2} \\ \sum_{u=2}^{m} \mathsf{P}(\Delta_u > 0)\, \mathbf{E}(\Delta_u|\Delta_u > 0) \geq \frac{1}{27n^2} \sum_{u=2}^{m} \mathsf{P}(\Delta_u > 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(q) = 1 + \sum_{u=2}^{m} \mathsf{P}(\Delta_u > 0) \leq 1 + \frac{n}{2} \cdot 27n^2 = O(n^3)$$

Алгоритм «Немхаузера-Ульмана» на случайных данных



Интернет поддержка курса

http://discopal.ispras.ru/

Вопросы?