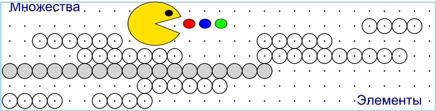
# Точность жадного алгоритма для почти всех входов

Н. Н. Кузюрин     С. А. Фомин

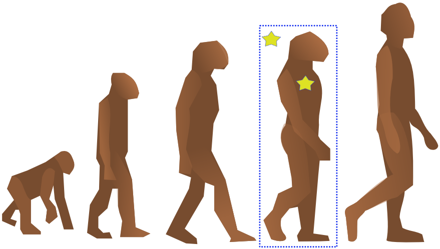
13 декабря 2011 г.

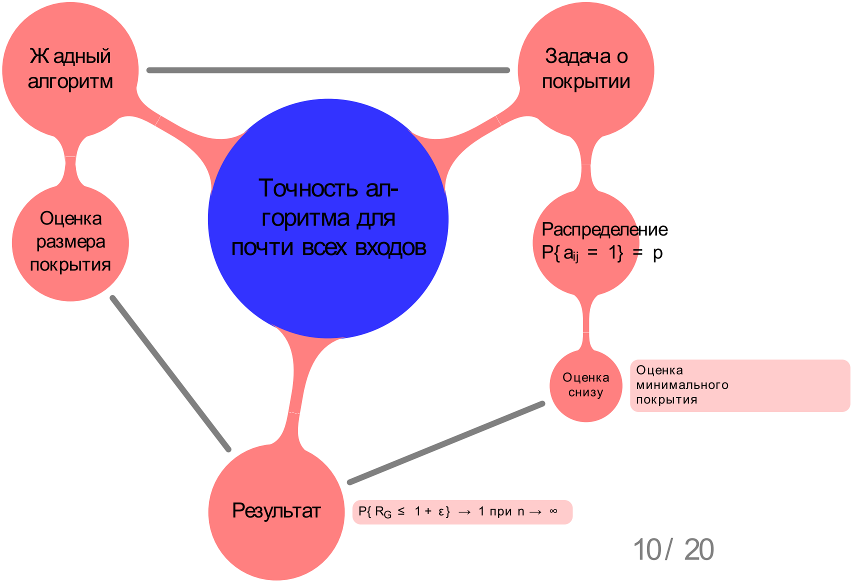


# Приближенный алгоритм с гарантированной точностью

## Определение

*Алгоритм называется С-**приближенным**, если при любых исходных данных он находит допустимое решение со значением целевой функции, отличающимся от оптимума не более чем в С раз.*




Жадный алгоритм
Задача о покрытии
Точность алгоритма для почти всех входов
Оценка размера покрытия
Распределение $P\{a_{ij} = 1\} = p$
Оценка снизу
Оценка минимального покрытия
Результат
$P\{R_G \leq 1 + \varepsilon\} \to 1$ при $n \to \infty$
10/ 20

# Покрытие множества

## Задача

*«Покрытие множества»*[a].

- *Множество* $X$, $|X| = m$.
- *Семейство подмножеств* $\{S_1, \ \ldots, S_n\}$, $S_j \subseteq X$.
- $X = \cup_{j=1}^{n} S_j$ *(покрытие гарантировано).*

*Найти минимальное по мощности множество подмножеств, покрывающее* $X$:

$$|J| \to \min,$$
$$J \subseteq \{1, 2, \ \ldots, n\},$$
$$X = \cup_{j \in J} S_j.$$

[a] В англоязычной литературе — *Set Cover*.

# Инцидентность

## Определение

*Пусть*

$L = \{l_1, \ldots, l_m\}$ *— m-элементное множество;*

$\{S_1, \ldots, S_n\}$ *— семейство подмножеств L;*

*Тогда*

- *Элемент $l_i$ и подмножество $S_j$ **инцидентны**, если $l_i \in S_j$.*
- ***Матрицей инцидентности** называется $\{0,1\}$-матрица $A = (a_{ij})$ размером $m \times n$, для которой:*
  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ *элемент $l_i$ и подмножество $S_j$ инцидентны.*

## ЦЛП для «Покрытия»

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \min$$

$$\forall j:\ 1 \le j \le n \quad x_j \in \{0, 1\}$$

$$\forall i:\ 1 \le i \le m \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1$$

## ЦЛП для «Покрытия»

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \min$$

$$\forall j:\ 1 \le j \le n \quad x_j \in \{0,1\}$$

$$\forall i:\ 1 \le i \le m \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1$$

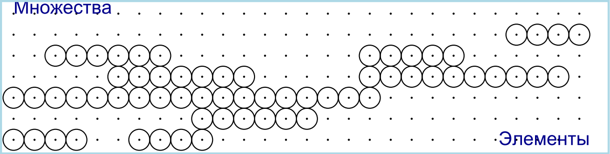
## ЦЛП для «Покрытия» (общий случай)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\forall j:\ 1 \le j \le n \quad x_j \in \{0,1\}$$

$$\forall i:\ 1 \le i \le m \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$$

# Жадный алгоритм в задаче о покрытии




Выбор на каждом шаге подмножества, покрывающего максимальное число еще непокрытых элементов:

## Теорема

*Пусть $a_{ij}$ являются независимыми случайными величинами, принимающими значения $\{0, 1\}$, причем выполняется:*

$$\mathsf{P}\{a_{ij} = 1\} = p$$

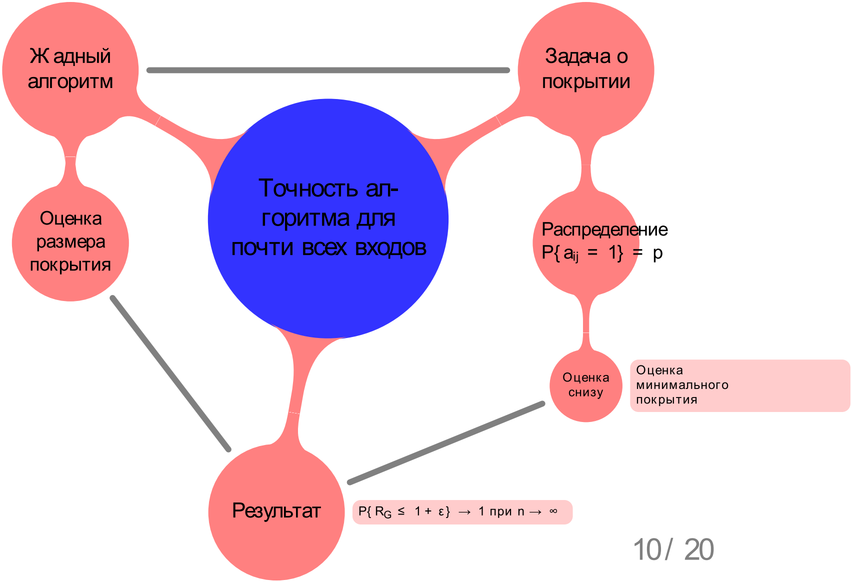
$$\mathsf{P}\{a_{ij} = 0\} = 1 - p$$

$$\forall \gamma > 0 \;\; \frac{\ln n}{m^\gamma} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

$$\frac{\ln m}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

*Тогда для любого фиксированного $\varepsilon > 0$*

$$\mathsf{P}\{R_G \leq 1 + \varepsilon\} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$


Жадный алгоритм
Задача о покрытии
Оценка размера покрытия
Точность алгоритма для почти всех входов
Распределение
P{ a_ij = 1} = p
Оценка снизу
Оценка минимального покрытия
Результат
P{ R_G ≤ 1 + ε} → 1 при n → ∞

$L$: Множество столбцов.

Покрывают_L: Множество столбцов $L$ является покрытием.

## Лемма

$$\mathrm{P}(\textit{Покрывают\_L}) \leq \exp\left\{-m(1-p)^{|L|}\right\}$$

## Доказательство.

Вероятность того, что столбцы из $L$:

- не покрывают какую-то одну строку:

$L$: Множество столбцов.

Покрывают_L: Множество столбцов $L$ является покрытием.

### Лемма

$$\mathrm{P}(\textit{Покрывают\_L}) \leq \exp\left\{-m(1-p)^{|L|}\right\}$$

### Доказательство.

Вероятность того, что столбцы из $L$:

- не покрывают какую-то одну строку: $(1-p)^{|L|}$.
- покрывают какую-то одну строку:

$L$: Множество столбцов.

Покрывают_L: Множество столбцов $L$ является покрытием.

## Лемма

$$\mathrm{P}(Покрывают\_L) \leq \exp\left\{-m(1-p)^{|L|}\right\}$$

## Доказательство.

Вероятность того, что столбцы из $L$:

- не покрывают какую-то одну строку: $(1-p)^{|L|}$.
- покрывают какую-то одну строку: $1-(1-p)^{|L|}$.
- покрывают все $m$-строк:

*L*: Множество столбцов.

Покрывают_L: Множество столбцов *L* является покрытием.

## Лемма

$$P(\textit{Покрывают\_L}) \leq \exp\left\{-m(1-p)^{|L|}\right\}$$

## Доказательство.

Вероятность того, что столбцы из *L*:

- не покрывают какую-то одну строку: $(1-p)^{|L|}$.
- покрывают какую-то одну строку: $1-(1-p)^{|L|}$.
- покрывают все *m*-строк: $\left(1-(1-p)^{|L|}\right)^m$.

*L*: Множество столбцов.

Покрывают_L: Множество столбцов *L* является покрытием.

## Лемма

$$\mathrm{P}(\textit{Покрывают\_L}) \le \exp\left\{-m(1-p)^{|L|}\right\}$$

## Доказательство.

Вероятность того, что столбцы из *L*:

- не покрывают какую-то одну строку: $(1-p)^{|L|}$.
- покрывают какую-то одну строку: $1-(1-p)^{|L|}$.
- покрывают все $m$-строк: $\left(1-(1-p)^{|L|}\right)^m$.

Откуда:

$$\left(1-(1-p)^{|L|}\right)^m \le \exp\left\{-m(1-p)^{|L|}\right\}$$

□

Пусть $X(l)$ — число покрытий размера $l$, тогда

$$\mathbf{E}\,X(l) = \sum_{L:|L|=l} \mathsf{P}\{\text{Покрывают\_L}\}$$
$$= \binom{n}{l}\left(1-(1-p)^l\right)^m$$
$$\leq n^l \exp\left\{-m(1-p)^l\right\}$$

Пусть для некоторой $0 < \delta < 1$, а $l_0 = -\lceil (1-\delta)\frac{\ln m}{\ln(1-p)} \rceil$, тогда

$$\ln \mathbf{E}\,X(l_0) \leq l_0 \ln n - m(1-p)^{l_0}$$
$$\leq -\frac{\ln m \ln n}{\ln(1-p)} - m\left\{(1-p)^{-\frac{(1-\delta)\ln m}{\ln(1-p)}}\right\}$$
$$\leq -\frac{\ln m \ln n}{\ln(1-p)} - m^{\delta} \underset{n\to\infty}{\longmapsto} -\infty$$

Будем подразумевать пределы «при $n \to \infty$».
Имеем $\mathbf{E}\, X(l_0) \to 0$.
По неравенству Чебышева:

$$\mathsf{P}\{X(l_0) \geq 1\} \leq \mathbf{E}\, X(l_0) \to 0$$

Значит,

$$\mathsf{P}\{\text{Нет покрытий размера } l_0\} \to 1,$$

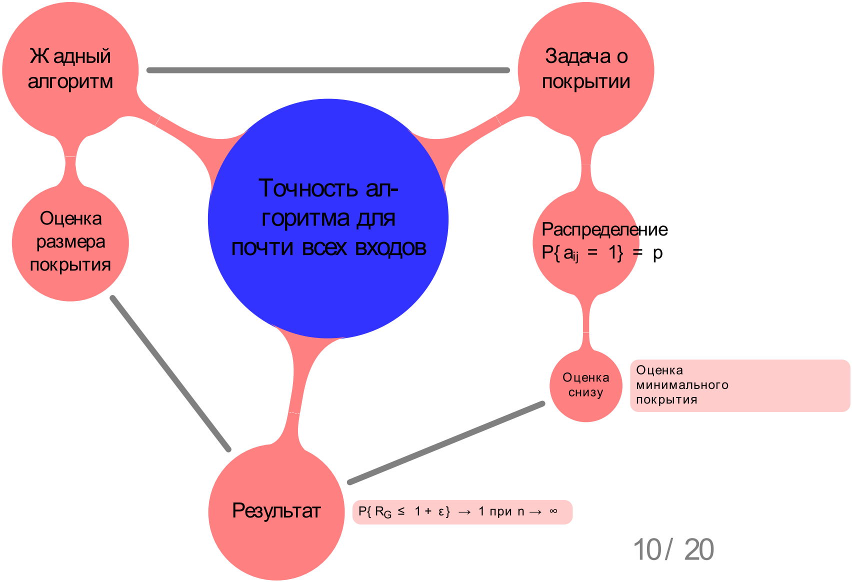
и

$$\mathsf{P}\{M_{optimal} \geq l_0\} \to 1.$$

Получили:

**Лемма**

*$l_0$ — нижняя вероятностная оценка размера минимального покрытия.*


Жадный алгоритм
Задача о покрытии
Точность алгоритма для почти всех входов
Оценка размера покрытия
Распределение P{ a_ij = 1} = p
Оценка снизу
Оценка минимального покрытия
Результат
P{ R_G ≤ 1 + ε} → 1 при n → ∞
10/ 20

### Лемма

*Пусть $Y$ — сумма $n$ независимых случайных величин:*

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{с вероятностью } p; \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p. \end{array}$$

*Тогда*

$$\mathsf{P}\{|Y - np| > \delta np\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\delta^2 np}{3}\right\}.$$

*BadCol* — событие «плохой столбец». (содержит $\leq (1-\delta)pn$ единиц). Тогда

$$\mathsf{P}\{BadCol\} \leq 2\exp\{-(\delta^2/3)np\}$$

$X_{BadCols}$ — число плохих стобцов.

Тогда

$$\mathbf{E}\, X_{BadCol} = m\,\mathsf{P}\{BadCol\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{\ln m - \frac{p\delta^2}{3}n\right\} = 2\exp\{\ln m - \Omega(1)n\} \to 0$$

По неравенству Чебышева:

$$\mathsf{P}\{X_{BadCol} \geq 1\} \leq \mathbf{E}\, X_{BadCol} \to 0$$

$N_t$ — число непокрытых строк после $t$-го шага жадного алгоритма.

$$\begin{aligned} N_t &\le N_{t-1} - \frac{N_{t-1}(1-\delta)pn}{n} = N_{t-1}\left(1-(1-\delta)p\right) \le \\ &\le N_0\left(1-(1-\delta)p\right)^t = m(1-(1-\delta)p)^t. \end{aligned}$$

Максимальное $t$, при котором еще есть непокрытый элемент:

$$m(1-(1-\delta)p)^t \ge 1$$

$$t \le -\frac{\ln m}{\ln(1-(1-\delta)p)}$$

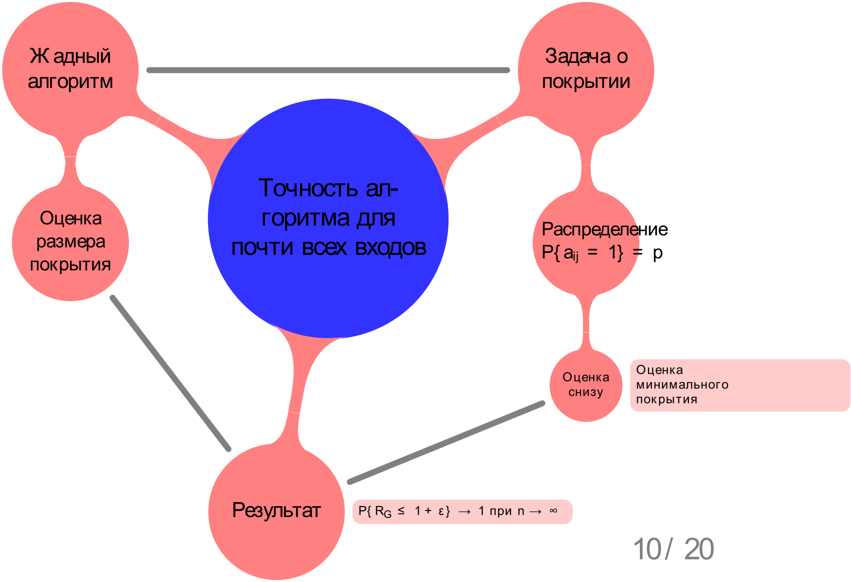
**Лемма**

$$\mathrm{P}\left(Z_G \le 1 - \frac{\ln m}{\ln(1-p(1-\delta))}\right) \to 1.$$

## $\forall\varepsilon > 0$, $\mathsf{P}\{R_G \le 1+\varepsilon\} \to 1$ при $n \to \infty$

Оцениваем при $n \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
R_G \le \frac{Z_G}{l_0} &\le \frac{1 - \frac{\ln m}{\ln(1-p(1-\delta))}}{-(1-\delta)\frac{\ln m}{\ln(1-p)}} \\
&\le \frac{\ln(1-p)}{(1-\delta)\ln(1-p(1-\delta))} + o(1) \\
&\le (1-\delta)^{-1} + o(1) \\
&\le 1+\varepsilon
\end{aligned}
$$


Жадный алгоритм
Задача о покрытии
Точность алгоритма для почти всех входов
Оценка размера покрытия
Распределение P{ a_ij = 1} = p
Оценка снизу
Оценка минимального покрытия
Результат
P{ R_G ≤ 1 + ε} → 1 при n → ∞
10/ 20

# Интернет поддержка курса

http://discopal.ispras.ru/

Вопросы?