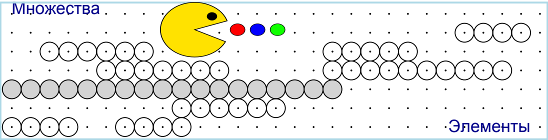
Жадные алгоритмы в задачах о покрытии

Н. Н. Кузюрин С. А. Фомин

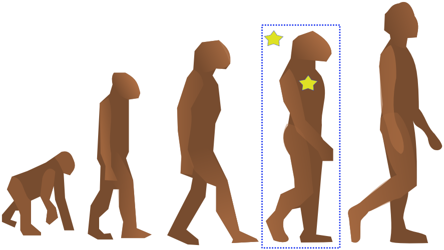
13 декабря 2010 г.



Приближенный алгоритм с гарантированной точностью

Определение

*Алгоритм называется C-**приближенным**, если при любых исходных данных он находит допустимое решение со значением целевой функции, отличающимся от оптимума не более чем в C раз.*



Покрытие множества

Задача

«Покрытие множества»[a].

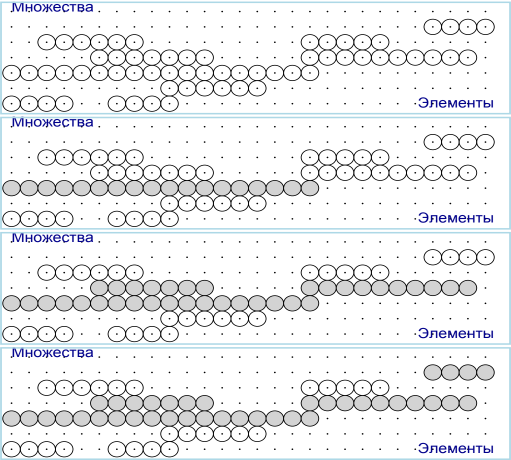
- *Множество* X, $|X| = m$.
- *Семейство подмножеств* $\{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_j \subseteq X$.
- $X = \cup_{j=1}^{n} S_j$ *(покрытие гарантировано).*

Найти минимальное по мощности множество подмножеств, покрывающее X*:*

$$
\begin{aligned}
&|J| \to \min, \\
&J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \\
&X = \cup_{j \in J} S_j.
\end{aligned}
$$

[a] В англоязычной литературе — *Set Cover*.

Жадный алгоритм в задаче о покрытии



Выбор на каждом шаге подмножества, покрывающего максимальное число еще непокрытых элементов:

Покрытие на каждом шаге

Лемма

X_k — *число непокрытых элементов после k-го шага.*

M — *размер минимального покрытия.*

$$X_{k+1} \leq X_k - \frac{X_k}{M} = X_k(1 - 1/M). \tag{1}$$

Покрытие на каждом шаге

Лемма

X_k — *число непокрытых элементов после k-го шага.*

M — *размер минимального покрытия.*

$$X_{k+1} \leq X_k - \frac{X_k}{M} = X_k(1 - 1/M). \qquad (1)$$

Доказательство.

1. Пусть X непокрытых покрываются минимум M' подмножествами.

$\square$

Покрытие на каждом шаге

Лемма

X_k — *число непокрытых элементов после k-го шага.*

M — *размер минимального покрытия.*

$$X_{k+1} \leq X_k - \frac{X_k}{M} = X_k(1 - 1/M). \qquad (1)$$

Доказательство.

1. Пусть X непокрытых покрываются минимум M' подмножествами.
2. Алгоритм за шаг покроет не меньше $\frac{X}{M'}$.

□

Покрытие на каждом шаге

Лемма

X_k — *число непокрытых элементов после k-го шага.*

M — *размер минимального покрытия.*

$$X_{k+1} \leq X_k - \frac{X_k}{M} = X_k(1 - 1/M). \qquad (1)$$

Доказательство.

1. Пусть X непокрытых покрываются минимум M' подмножествами.
2. Алгоритм за шаг покроет не меньше $\frac{X}{M'}$.
3. Иначе, оптимальное покрытие должно покрывать меньше $M' \cdot \frac{X}{M'}$ элементов.

□

Покрытие на каждом шаге

Лемма

X_k — число непокрытых элементов после k-го шага.

M — размер минимального покрытия.

$$X_{k+1} \leq X_k - \frac{X_k}{M} = X_k(1 - 1/M). \qquad (1)$$

Доказательство.

1. Пусть X непокрытых покрываются минимум M' подмножествами.
2. Алгоритм за шаг покроет не меньше $\frac{X}{M'}$.
3. Иначе, оптимальное покрытие должно покрывать меньше $M' \cdot \frac{X}{M'}$ элементов.
4. Т.к $M' \leq M$, получаем доказательство (1).

□

Точность жадного алгоритма: верхняя оценка

Теорема

Размер покрытия, построенного жадным алгоритмом, превосходит минимальное не более чем в $1 + \ln m$ *раз.*

Точность жадного алгоритма: верхняя оценка

Теорема

Размер покрытия, построенного жадным алгоритмом, превосходит минимальное не более чем в $1 + \ln m$ *раз.*

Доказательство.

X_i — число непокрытых элементов после i-го шага.

M — размер минимального покрытия.

Точность жадного алгоритма: верхняя оценка

Теорема

Размер покрытия, построенного жадным алгоритмом, превосходит минимальное не более чем в $1 + \ln m$ *раз.*

Доказательство.

X_i — число непокрытых элементов после i-го шага.

M — размер минимального покрытия.

1. $X_0 = X$, $|X_0| = |X| = m$
2. $X_k \leq m(1 - 1/M)^k \leq m \exp(-\frac{k}{M})$

□

Точность жадного алгоритма: верхняя оценка

Теорема

Размер покрытия, построенного жадным алгоритмом, превосходит минимальное не более чем в $1 + \ln m$ *раз.*

Доказательство.

X_i — число непокрытых элементов после i-го шага.

M — размер минимального покрытия.

1. $X_0 = X$, $|X_0| = |X| = m$
2. $X_k \leq m(1 - 1/M)^k \leq m \exp(-\frac{k}{M})$
3. Пусть k_0 - последний шаг, когда $m \exp(-\frac{k_0}{M}) \geq 1$.

□

Точность жадного алгоритма: верхняя оценка

Теорема

Размер покрытия, построенного жадным алгоритмом, превосходит минимальное не более чем в $1 + \ln m$ раз.

Доказательство.

X_i — число непокрытых элементов после i-го шага.

M — размер минимального покрытия.

1. $X_0 = X$, $|X_0| = |X| = m$
2. $X_k \leq m(1 - 1/M)^k \leq m \exp(-\frac{k}{M})$
3. Пусть k_0 - последний шаг, когда $m \exp(-\frac{k_0}{M}) \geq 1$.
4. Тогда при $k_1 = k_0 + 1$ будет $X_{k_1} < 1$.

□

Точность жадного алгоритма: верхняя оценка

Теорема

Размер покрытия, построенного жадным алгоритмом, превосходит минимальное не более чем в $1 + \ln m$ *раз.*

Доказательство.

X_i — число непокрытых элементов после i-го шага.

M — размер минимального покрытия.

1. $X_0 = X$, $|X_0| = |X| = m$
2. $X_k \leq m(1 - 1/M)^k \leq m \exp(-\frac{k}{M})$
3. Пусть k_0 - последний шаг, когда $m \exp(-\frac{k_0}{M}) \geq 1$.
4. Тогда при $k_1 = k_0 + 1$ будет $X_{k_1} < 1$.
5. $k_1/M \leq 1 + \ln m$

□

Как обмануть жадный алгоритм? Нижняя оценка.

k-покрытие множества

Задача

«К-покрытие»

Задано:

- *Множество X, $|X| = m$.*
- *Семейство подмножеств $\{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_j \subseteq X$.*

Выбрать такие k подмножеств, чтобы мощность их объединения была максимальна:

$$
\begin{aligned}
&|\cup_{j \in J} S_j| \to \max, \\
&J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \\
&|J| = k.
\end{aligned}
$$

Жадный — $(1 - e^{-1})$-приближенный для «k-покрытия»

Доказательство.

X_i — число покрытых элементов после i-го шага.

M — оптимум.

Жадный — $(1 - e^{-1})$-приближенный для «k-покрытия»

Доказательство.

X_i — число покрытых элементов после i-го шага.

M — оптимум.

$$X_{i+1} \geq X_i + \frac{M - X_i}{k} = \frac{M}{k} + X_i \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Жадный — $(1 - e^{-1})$-приближенный для «k-покрытия»

Доказательство.

X_i — число покрытых элементов после i-го шага.

M — оптимум.

$$X_{i+1} \geq X_i + \frac{M - X_i}{k} = \frac{M}{k} + X_i\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

$$\begin{aligned} X_k &\geq \frac{M}{k}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}\right] \\ &= \frac{M}{k}\left[\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k}{\frac{1}{k}}\right] = M\left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right] \geq M(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

$\square$

Вершинное покрытие

Определение

«Вершинное покрытие»[a]*.*
Для неориентированного графа $G = (V, E)$ *подмножество вершин* $V' \subseteq V$ *называется* ***вершинным покрытием****, если каждое ребро из* E *содержит хотя бы одну вершину из* V'*.*

[a] В англоязычной литературе — *Vertex Cover*.

Вершинное покрытие

Определение

«Вершинное покрытие»[a].

Для неориентированного графа $G = (V, E)$ подмножество вершин $V' \subseteq V$ называется ***вершинным покрытием****, если каждое ребро из E содержит хотя бы одну вершину из V'.*

---

[a] В англоязычной литературе — *Vertex Cover*.

Задача

«Минимальное вершинное покрытие»[a].

Дан неориентированный граф $G = (V, E)$ (множество вершин V, множество ребер E). Найти вершинное покрытие минимальной мощности.

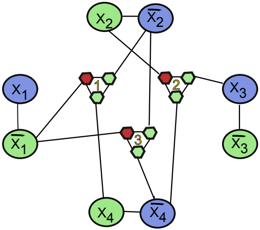
---

[a] В англоязычной литературе — *Min Vertex Covering*.

«Ленивый» алгоритм для вершинного покрытия

$C \leftarrow \emptyset$
while $\exists e = (u, v)$: непокрытое ребро **do**
  $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
  Пометить «покрытыми» все ребра
  инцидентные u и v.
end while
return C

Вершинное
покрытие — зеленое.



Определение

Паросочетание[a] *— подмножество ребер графа, такое, что никакие два ребра из этого подмножества не инцидентны какой-либо одной вершине.*

[a] *Matching* в англоязычной литературе.

Теорема

«Ленивый» алгоритм для задачи «Min Vertex Covering» гарантирует точность 2.

Доказательство.

1. E^* — ребра, «попавшиеся алгоритму».

Теорема

«Ленивый» алгоритм для задачи «Min Vertex Covering» гарантирует точность 2.

Доказательство.

1. E^* — ребра, «попавшиеся алгоритму».
2. $|E^*| = |C|/2$

Теорема

«Ленивый» алгоритм для задачи «Min Vertex Covering» гарантирует точность 2.

Доказательство.

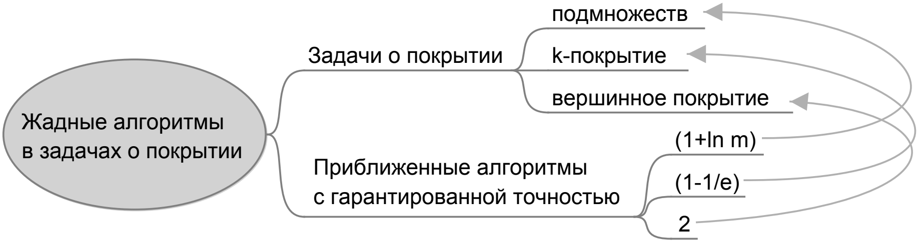
1. E^* — ребра, «попавшиеся алгоритму».
2. $|E^*| = |C|/2$
3. $OPT \geq |E^*|$: $\forall$ вершинное покрытие должно содержать по крайней мере одну вершину для каждого ребра из E^*.

Получаем:

$$|C| \leq 2 \cdot OPT.$$

□

«Карта памяти» лекции



Интернет поддержка курса

http://discopal.ispras.ru/

Вопросы?