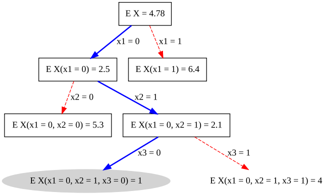
Дерандомизация и метод условных вероятностей для «MAX-SAT»

Н. Н. Кузюрин С. А. Фомин

14 апреля 2016 г.



Иногда вероятностные алгоритмы могут быть «дерандомизированы» — конвертированы в детерминированные алгоритмы.
Один из таких методов — «метод условных вероятностей».

Задача «MAX-SAT»

Задача

Максимальная выполнимость/MAX-SAT.
Даны m скобок конъюнктивной нормальной формы (КНФ) с n переменными. Найти значения переменных, максимизирующие число выполненных скобок.

Задача «MAX-SAT»

Задача

Максимальная выполнимость/MAX-SAT.
Даны m скобок конъюнктивной нормальной формы (КНФ) с n переменными. Найти значения переменных, максимизирующие число выполненных скобок.

x_i: независимые случайные величины,

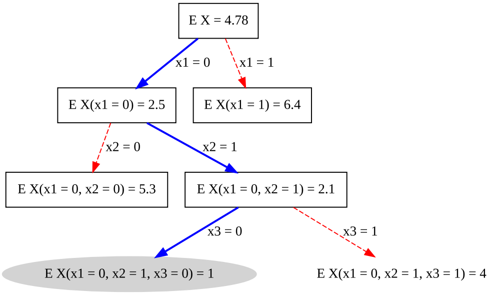
$$P\{x_i = 1\} = p_i, \;\; P\{x_i = 0\} = 1 - p_i.$$

$X(x_1, \;\ldots, x_n)$: число невыполненных скобок в КНФ.

Надо найти $\hat{x}$:

$$X(\hat{x}) \leq \mathbf{E}\, X.$$

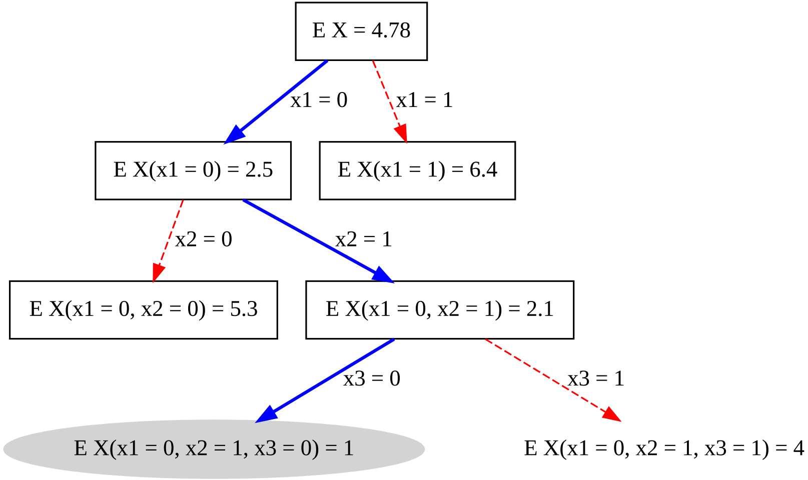
Покомпонентная стратегия нахождения $\hat{x}$



$$\mathbf{E}\, X(x|\, x_1 = d_1,\ \ldots, x_n = d_n) = \\ = X(d_1,\ \ldots, d_n)$$

1. Вычисляем
$$\begin{cases} f_0 \leftarrow \mathbf{E}\, X(x|\, x_1 = 0) \\ f_1 \leftarrow \mathbf{E}\, X(x|\, x_1 = 1) \end{cases}$$
2. Если $f_0 < f_1$, то $d_1 = 0$, иначе $d_1 = 1$.
3. Вычисляем
$$f_0 \leftarrow \mathbf{E}\, X(x|\, x_1 = d_1, x_2 = 0)$$
$$f_1 \leftarrow \mathbf{E}\, X(x|\, x_1 = d_1, x_2 = 1)$$
4. Если $f_0 < f_1$, то $d_2 = 0$, иначе $d_2 = 1$.
5. ...

Покомпонентная стратегия нахождения $\hat{x}$



Почему эта стратегия работает?

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\,X = \mathsf{P}\{x_1 = 1\}\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = 1) + \mathsf{P}\{x_1 = 0\}\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = 0) = \\
= p_1\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = 1) + (1 - p_1)\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = 0) \geq \\
\geq p_1\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = d_1) + (1 - p_1)\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = d_1) = \\
= (p_1 + 1 - p_1)\,\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = d_1) = \mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = d_1).
\end{aligned}
$$

Аналогично продолжая:

$$
\mathbf{E}\,X \geq \mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = d_1,\ \ldots, x_n = d_n).
$$

Но

$$
\mathbf{E}\,X(x|\,x_1 = d_1,\ \ldots, x_n = d_n) = X(d_1,\ \ldots, d_n).
$$

Задача

MAX-SAT(IP)

C_j *: скобка.*

$z_j = \{0, 1\}$ *: значение скобки.*

C_j^+ *:* $i : x_i \in C_j$ *(положительные литералы в скобке).*

C_j^- *:* $i : \overline{x_i} \in C_j$*.*

$$\sum_{j=1}^{m} z_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{i \in C_j^+} x_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - x_i) \geq z_j, \quad \forall j.$$

$$x_i,\ z_j \in \{0, 1\},\ \forall i, j$$

Линейная релаксация задачи 2 «MAX-SAT»

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} z_j \to \max && (2)\\
&\sum_{i \in C_j^+} x_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - x_i) \geq z_j, \quad \forall j. \\
&x_i,\ z_j \in [0, 1],\ \forall i, j
\end{aligned}
$$

Вход: Формулировка задачи 1 «MAX-SAT» в виде (1).

$\hat{x} \leftarrow$ решения линейной релаксации (2)

for all $i \in \{1..m\}$ **do**

$x_i \leftarrow 0$

if $random(0..1) \leq \hat{x}_i$ **then**

$x_i \leftarrow 1$ $\{x_i \leftarrow 1$ с вероятностью $\hat{x}_i\}$

end if

end for

Выход: $(x_1, \ \ldots, x_m)$.

Теорема

Алгоритм «Линейная релаксация и вероятностное округление» обеспечивает приближенное решение «MAX-SAT», со средней точностью $(1 - \frac{1}{e})$.

Откуда следует, что

$$\mathbf{E}\, X \leq \frac{m}{e}$$

$$X(x_1 = d_1, \ \ldots, x_n = d_n) \leq \frac{m}{e}$$

Дерандомизация для MAX-SAT

Вероятность невыполнения j-й дизъюнкции

$$P_j = \mathsf{P}\{C_j = 0\} = \mathsf{P}\left\{\sum_{i \in C_j^+} x_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - x_i) = 0\right\}.$$

$$\mathbf{E}\, X = \sum_{j=1}^{m} P_j, \tag{3}$$

Пусть первые k переменных определены и

I_0: $\forall i \in I_0\ x_i = 0$

I_1: $\forall i \in I_1\ x_i = 1$

Если $I_0 \cap C_j^- \neq \emptyset$ или $I_1 \cap C_j^+ \neq \emptyset$, то $P_j = 0$, иначе:

$$P_j = \prod_{i \in C_j^+ \setminus I_0} (1 - p_i) \cdot \prod_{i \in C_j^- \setminus I_1} p_i. \tag{4}$$

Дерандомизация для MAX-SAT

Вход: Формулировка задачи 1 «MAX-SAT» в виде (1).
Выход: $(x_1, \ldots, x_n)$ — приближенное решение (1).

$(p_1, \ldots, p_n) \leftarrow$ решения линейной релаксации (2).
for all $i \in \{1..n\}$ **do**
  $f_0 = \mathbf{E}\, X(x|\, x_i = 0)$ {Вычисляется через (4)}
  $f_1 = \mathbf{E}\, X(x|\, x_i = 1)$ { и (3)}
  if $f_0 < f_1$ **then**
    $x_i \leftarrow 0$
  else
    $x_i \leftarrow 1$
  end if
end for
return $\mathbf{x}$

Дерандомизация для MAX-SAT

Вход: Формулировка задачи 1 «MAX-SAT» в виде (1).
Выход: $(x_1, \ldots, x_n)$ — приближенное решение (1).

$(p_1, \ldots, p_n) \leftarrow$ решения линейной релаксации (2).
for all $i \in \{1..n\}$ **do**
  $f_0 = \mathbf{E}\, X(x|\, x_i = 0)$ {Вычисляется через (4)}
  $f_1 = \mathbf{E}\, X(x|\, x_i = 1)$ { и (3)}
  if $f_0 < f_1$ **then**
    $x_i \leftarrow 0$
  else
    $x_i \leftarrow 1$
  end if
end for
return $\mathbf{x}$

Упражнение

Как организовать вычисление f_0 и f_1, чтобы сложность алгоритма (кроме решения линейной релаксации) была $O(mn)$?

Интернет поддержка курса

`http://discopal.ispras.ru/`

Вопросы?