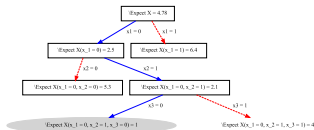


Дерандомизация и метод условных вероятностей для «MAX-SAT»

Н. Н. Кузюрин С. А. Фомин

17 февраля 2011 г.



Иногда вероятностные алгоритмы могут быть «дерандомизированы» — конвертированы в детерминированные алгоритмы.

Один из таких методов — «метод условных вероятностей».

Задача «MAX-SAT»

Задача

Максимальная выполнимость/MAX-SAT.

Даны m скобок конъюнктивной нормальной формы (КНФ) с n переменными. Найти значения переменных, максимизирующие число выполненных скобок.

Задача «MAX-SAT»

Задача

Максимальная выполнимость/MAX-SAT.

Даны t скобок конъюнктивной нормальной формы (КНФ) с n переменными. Найти значения переменных, максимизирующие число выполненных скобок.

x_i : независимые случайные величины,

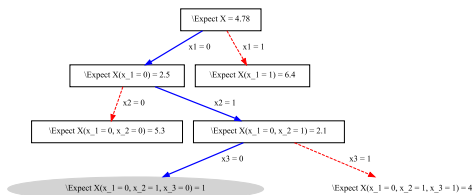
$$P\{x_i = 1\} = p_i, \quad P\{x_i = 0\} = 1 - p_i.$$

$X(x_1, \dots, x_n)$: число невыполненных скобок в КНФ.

Надо найти \hat{x} :

$$X(\hat{x}) \leq \mathbf{E} X.$$

Покомпонентная стратегия нахождения \hat{x}



$$\begin{aligned} \mathbf{E}X(x | x_1 = d_1, \dots, x_n = d_n) &= \\ &= X(d_1, \dots, d_n) \end{aligned}$$

1 Вычисляем

$$\begin{cases} f_0 \leftarrow \mathbf{E}X(x | x_1 = 0) \\ f_1 \leftarrow \mathbf{E}X(x | x_1 = 1) \end{cases}$$

2 Если $f_0 < f_1$, то $d_1 = 0$,
иначе $d_1 = 1$.

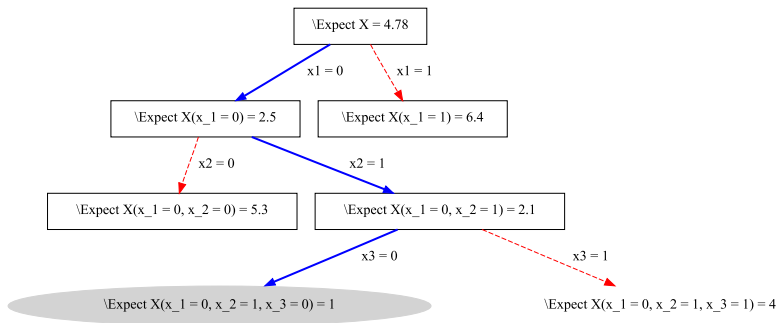
3 Вычисляем

$$\begin{aligned} f_0 &\leftarrow \mathbf{E}X(x | x_1 = d_1, x_2 = 0) \\ f_1 &\leftarrow \mathbf{E}X(x | x_1 = d_1, x_2 = 1) \end{aligned}$$

4 Если $f_0 < f_1$, то $d_2 = 0$,
иначе $d_2 = 1$.

5 ...

Покомпонентная стратегия нахождения \hat{x}



Почему эта стратегия работает?

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \mathbf{P}\{x_1 = 1\} \mathbf{E}X(x| x_1 = 1) + \mathbf{P}\{x_1 = 0\} \mathbf{E}X(x| x_1 = 0) = \\ &= p_1 \mathbf{E}X(x| x_1 = 1) + (1 - p_1) \mathbf{E}X(x| x_1 = 0) \geq \\ &\geq p_1 \mathbf{E}X(x| x_1 = d_1) + (1 - p_1) \mathbf{E}X(x| x_1 = d_1) = \\ &= (p_1 + 1 - p_1) \mathbf{E}X(x| x_1 = d_1) = \mathbf{E}X(x| x_1 = d_1).\end{aligned}$$

Аналогично продолжая:

$$\mathbf{E}X \geq \mathbf{E}X(x| x_1 = d_1, \dots, x_n = d_n).$$

Но

$$\mathbf{E}X(x| x_1 = d_1, \dots, x_n = d_n) = X(d_1, \dots, d_n).$$

Задача

MAX-SAT(IP)

C_j : скобка.

$z_j = \{0, 1\}$: значение скобки.

C_j^+ : $i : x_i \in C_j$ (положительные литералы в скобке).

C_j^- : $i : \bar{x}_i \in C_j$.

$$\sum_{j=1}^m z_j \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{i \in C_j^+} x_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - x_i) \geq z_j, \quad \forall j.$$

$$x_i, z_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j$$

Линейная релаксация задачи 2

$$\sum_{j=1}^m z_j \rightarrow \max \quad (2)$$

$$\sum_{i \in C_j^+} x_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - x_i) \geq z_j, \quad \forall j.$$

$$x_i, z_j \in [0, 1], \quad \forall i, j$$

Вход: Формулировка задачи 1 в виде (1).

$\hat{x} \leftarrow$ решения линейной релаксации (2)

for all $i \in \{1..m\}$ **do**

$x_i \leftarrow 0$

if $\text{random}(0..1) \leq \hat{x}_i$ **then**

$x_i \leftarrow 1$ { $x_i \leftarrow 1$ с вероятностью \hat{x}_i }

end if

end for

Выход: (x_1, \dots, x_m) .

Теорема

Алгоритм «Линейная релаксация и вероятностное округление» обеспечивает приближенное решение «MAX-SAT», со средней точностью $(1 - \frac{1}{e})$.

Откуда следует, что

$$\mathbf{E} X \leq \frac{m}{e}$$

$$X(x_1 = d_1, \dots, x_n = d_n) \leq \frac{m}{e}$$

Дерандомизация для MAX-SAT

Вероятность невыполнения j -й дизъюнкции

$$P_j = P\{C_j = 0\} = P\left\{\sum_{i \in C_j^+} x_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - x_i) = 0\right\}.$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{j=1}^m P_j, \quad (3)$$

Пусть первые k переменных определены и

$$I_0: \forall i \in I_0 \ x_i = 0$$

$$I_1: \forall i \in I_1 \ x_i = 1$$

Если $I_0 \cap C_j^- \neq \emptyset$ или $I_1 \cap C_j^+ \neq \emptyset$, то $P_j = 0$, иначе:

$$P_j = \prod_{i \in C_j^+ \setminus I_0} (1 - p_i) \cdot \prod_{i \in C_j^- \setminus I_1} p_i. \quad (4)$$

Дерандомизация для MAX-SAT

Вход: Формулировка задачи 1 в виде (1).

Выход: (x_1, \dots, x_n) — приближенное решение (1).

$(p_1, \dots, p_n) \leftarrow$ решения линейной релаксации (2).

for all $i \in \{1..n\}$ **do**

$f_0 = \mathbf{E} X(x | x_i = 0)$ {Вычисляется через (4)}

$f_1 = \mathbf{E} X(x | x_i = 1)$ { и (3)}

if $f_0 < f_1$ **then**

$x_i \leftarrow 0$

else

$x_i \leftarrow 1$

end if

end for

return x

Дерандомизация для MAX-SAT

Вход: Формулировка задачи 1 в виде (1).

Выход: (x_1, \dots, x_n) — приближенное решение (1).

$(p_1, \dots, p_n) \leftarrow$ решения линейной релаксации (2).

for all $i \in \{1..n\}$ **do**

$f_0 = \mathbf{E} X(x | x_i = 0)$ {Вычисляется через (4)}

$f_1 = \mathbf{E} X(x | x_i = 1)$ { и (3)}

if $f_0 < f_1$ **then**

$x_i \leftarrow 0$

else

$x_i \leftarrow 1$

end if

end for

return x

Упражнение

Как организовать вычисление f_0 и f_1 , чтобы сложность алгоритма (кроме решения линейной релаксации) была $O(mn)$?

<http://discopal.ispras.ru/>

Вопросы?