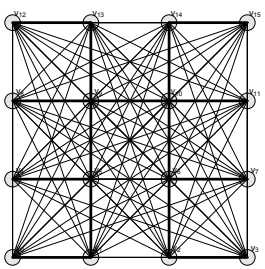
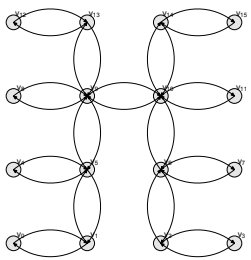
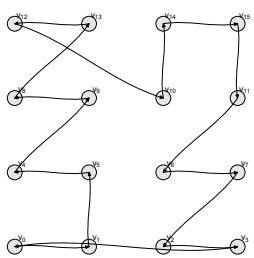
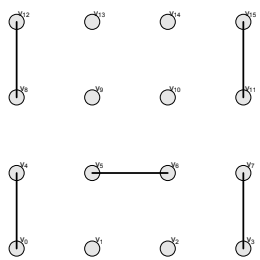
# Алгоритм Кристофидеса

Н. Н. Кузюрин  С. А. Фомин

3 декабря 2010 г.

**Определение**

***Эйлеровым путем*** *в графе называется произвольный путь, проходящий через каждое ребро графа в точности один раз.*

**Определение**

*Замкнутый эйлеров путь называется* ***эйлеровым обходом*** *или* ***эйлеровым циклом****.*

**Определение**

***Эйлеров граф*** *— граф, в котором существует эйлеров обход.*

## Теорема

*Эйлеров цикл существует $\Leftrightarrow$ граф связный и все его вершины четной степени.*

```
def EulerCircuitExists(G):
    for v in G.nodes():      #Проверка необходимых
        if G.degree(v) % 2 <> 0: # условий существования
            return False
    return True
```

## Доказательство.

**Достаточность** $\leftarrow$ алгоритм нахождения эйлерова пути.

**Необходимость**:
если вершина $v$ в эйлеровом обходе $k$ раз
$\Rightarrow$ степень этой вершины в графе $2k$. $\square$

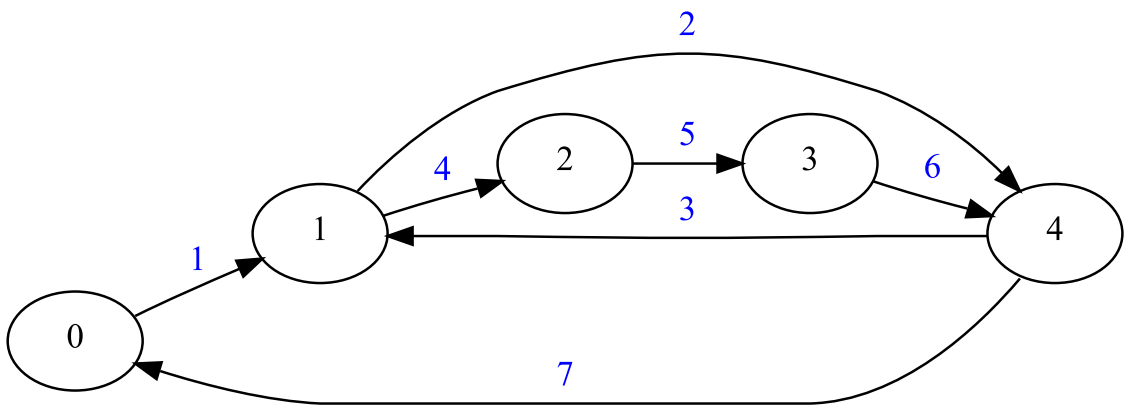
# Алгоритм нахождения Эйлерова цикла

```
def EulerCircuit(G):
    if not EulerCircuitExists(G):
        return None

    # Первая попавшаяся – в ЭЦ!
    EP = [ G.nodes()[0] ]
    while G.number_of_edges() > 0:
        for i, v in enumerate(EP):
            # куда бы добавить цикл?
            if G.degree(EP[i]) > 0:
              break
        while G.degree(v) > 0:
            #пока не в «тупике»
            w = G.neighbors(v)[0]
            G.remove_edge(v, w)
            i += 1;
            EP.insert(i, w)
            v = w  # и повторяем все с w
    return EP
```

# Алгоритм нахождения Эйлерова цикла

```
def EulerCircuit(G):
    if not EulerCircuitExists(G):
        return None

    # Первая попавшаяся – в ЭЦ!
    EP = [ G.nodes()[0] ]
    while G.number_of_edges() > 0:
        for i, v in enumerate(EP):
            # куда бы добавить цикл?
            if G.degree(EP[i]) > 0:
              break
        while G.degree(v) > 0:
            #пока не в «тупике»
            w = G.neighbors(v)[0]
            G.remove_edge(v, w)
            i += 1;
            EP.insert(i, w)
            v = w  # и повторяем все с w
    return EP
```

```
[0] + 0 : < 1 2 3 4 0 > -> [0, 1, 2, 3, 4, 0]
[0, 1, 2, 3, 4, 0] + 1 : < 4 1 > -> [0, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 0]
[0, 1, 4, 1, 2, 3, 4, 0]
```



## Задача

*«Коммивояжер», «TSP[a]». Заданы неориентированный граф из n вершин-городов, и $d_{ij} \equiv d(v_i, v_j)$ — положительные целые расстояния между городами.*
*Чему равна наименьшая возможная длина гамильтонова цикла (кольцевого маршрута, проходящего по одному разу через все города)?*
*т. е. нужно найти минимально возможное значение суммы*

$$\min_{p \in \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \sum_{i=1}^{n-1} d_{p_i, p_{i+1}} + d_{p_n, p_1}, \tag{1}$$

*где минимум берется по всем перестановкам p чисел* $1, \dots, n$.

[a] В англоязычной литературе — Traveling Salesman Problem.

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется* ***метрической****, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется* ***метрической****, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

В метрической TSP — граф должен быть полным!

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется* ***метрической****, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

В метрической TSP — граф должен быть полным!

## Лемма

*Метрическая задача коммивояжера $\mathcal{NP}$-полна.*

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется* ***метрической****, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

В метрической TSP — граф должен быть полным!

## Лемма

*Метрическая задача коммивояжера $\mathcal{NP}$-полна.*

## Доказательство.

1. «Гамильтонов цикл» (единичные веса) — $\mathcal{NP}$-полна.

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется* ***метрической****, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

В метрической TSP — граф должен быть полным!

## Лемма

*Метрическая задача коммивояжера $\mathcal{NP}$-полна.*

## Доказательство.

1. «Гамильтонов цикл» (единичные веса) — $\mathcal{NP}$-полна.
2. Дополним до полного графа ребрами с весом $2$.

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется* ***метрической****, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

В метрической TSP — граф должен быть полным!

## Лемма

*Метрическая задача коммивояжера $\mathcal{NP}$-полна.*

## Доказательство.

1. «Гамильтонов цикл» (единичные веса) — $\mathcal{NP}$-полна.
2. Дополним до полного графа ребрами с весом $2$.
3. Граф с весами $1$ и $2$ — метрический.

## Определение

*Задача коммивояжера (задача «TSP») называется **метрической**, если для матрицы расстояний выполнено неравенство треугольника:*

$$\forall i, j, k \;\; d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}.$$

В метрической TSP — граф должен быть полным!

## Лемма

*Метрическая задача коммивояжера $\mathcal{NP}$-полна.*

## Доказательство.

1. «Гамильтонов цикл» (единичные веса) — $\mathcal{NP}$-полна.
2. Дополним до полного графа ребрами с весом $2$.
3. Граф с весами $1$ и $2$ — метрический.
4. Если оптимум не включает в себя ребра с весом $2$ — то это гамильтонов цикл для исходного графа.

□

## Задача

*«Минимальное остовное дерево» (Minimum Spanning Tree)*
*Задан связный неориентированный граф* $G = (V, E)$, *где*
$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$*—множество вершин,* $|V| = n$, *E—множество ребер между ними, и весовая функция* $w : E \to Z+$[a]
*Требуется найти наименьший возможный вес остовного дерева, т. е.*

$$\min \sum_{(i,j)\in T} w(v_i, v_j), \tag{2}$$

*где минимум берется по всем остовным деревьям на n вершинах (по всем множествам T из* $(n-1)$ *дуг, связывающим все n вершин в единую сеть).*

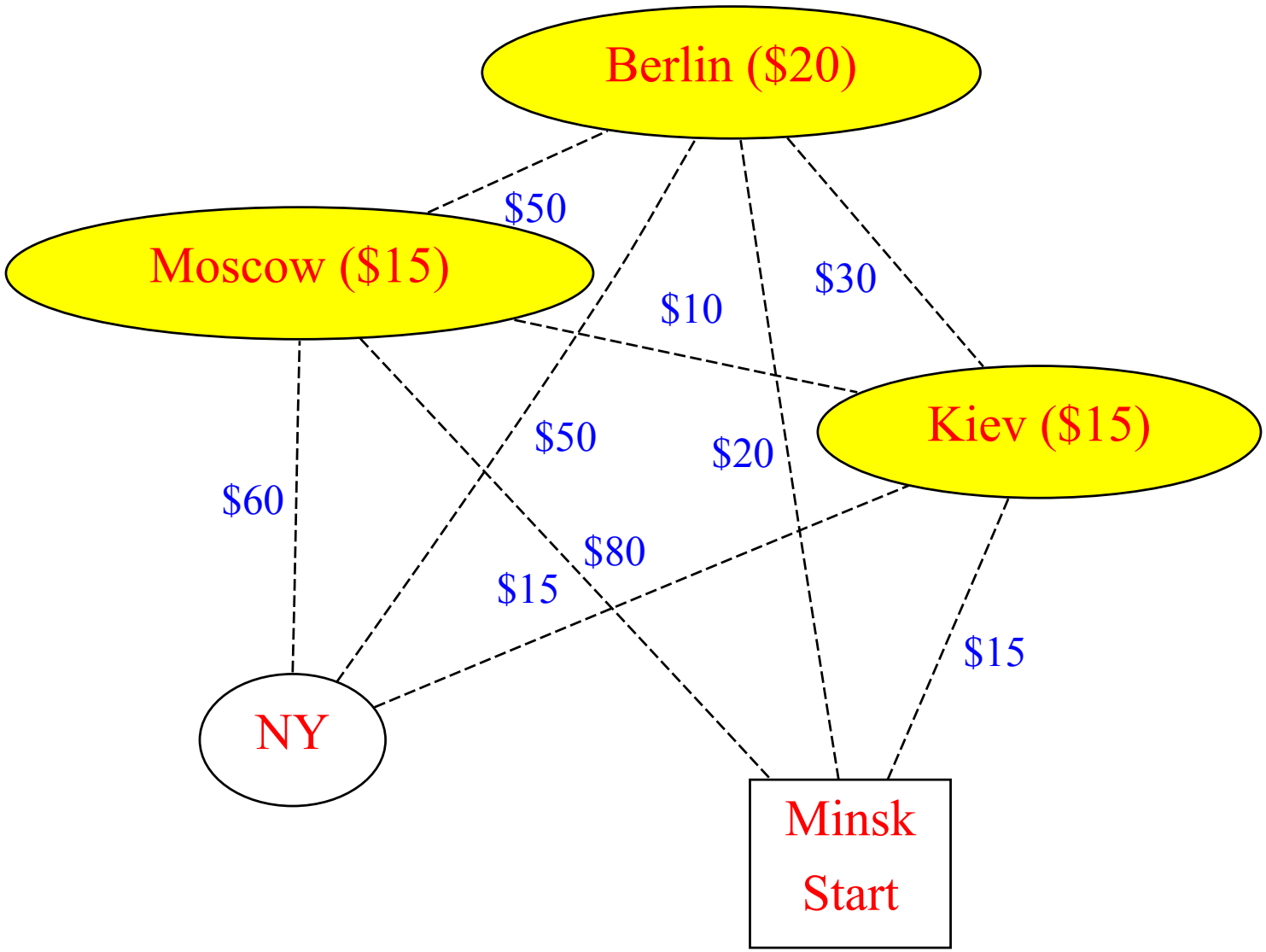
---

[a] Можно вводить положительные целые веса на ребрах, как $w_{ij} \equiv w(v_i, v_j)$.

# Алгоритм Прима

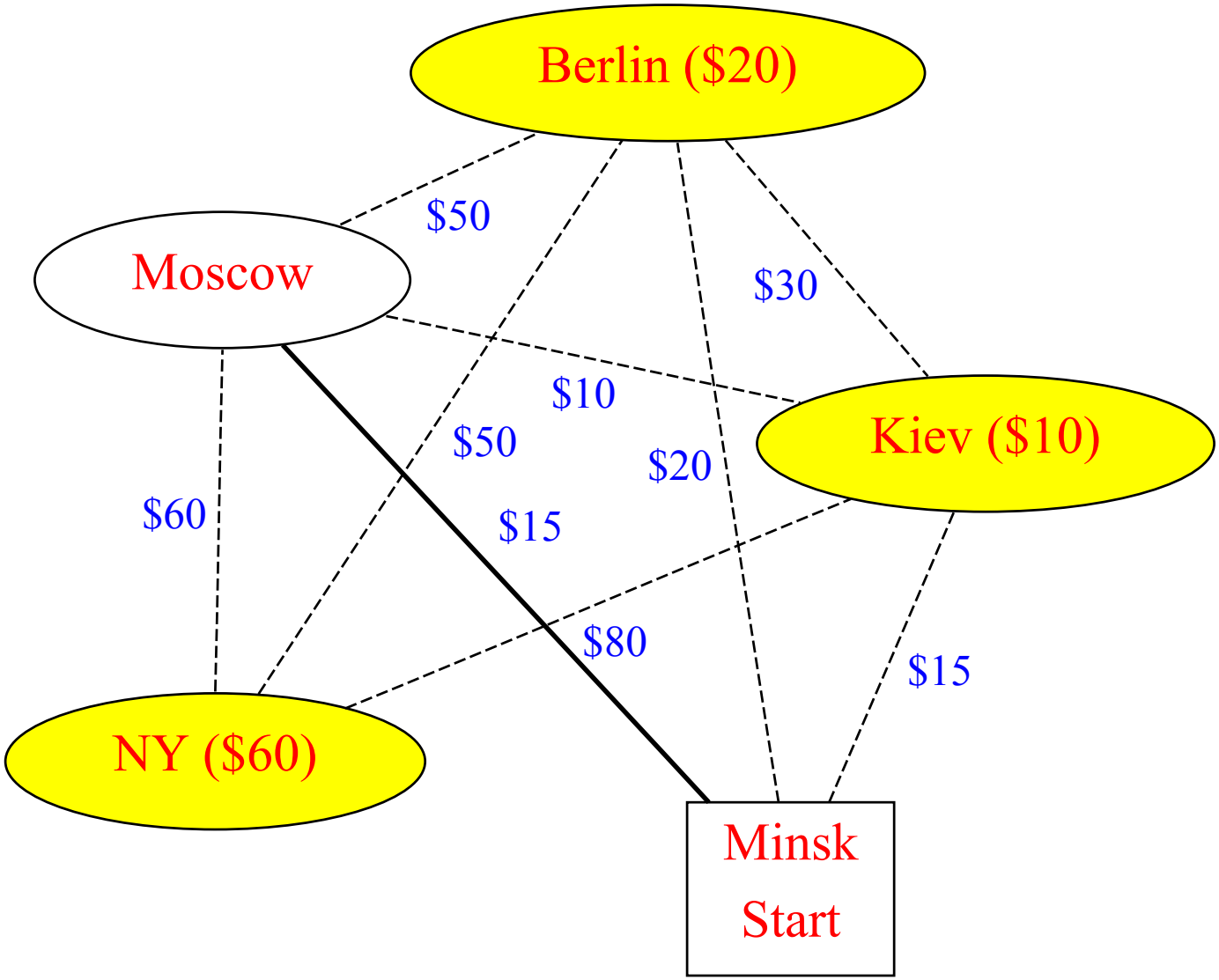
```
def MST_Prim(G, s):
    MST = {} #хэш (узел: предшественник)
    ToVisit = {s: 0}  # граничащие с MST, (узел: стоимость)
    Ancestor = {s: s} #хэш: вершины из которых включают другие
    while ToVisit:  # пока есть непосещенные вершины
        v = argmin(ToVisit) # ближайшая достижимая вершина
        MST[v] = Ancestor[v] # запоминаем, откуда пришли
        del ToVisit[v]
        del Ancestor[v] # больше не посещать
        for w in G.neighbors(v): # для всех соседей вершины v
            if w not in MST:  # которые еще не в MST
                # обновляем стоимость включения в MST
                if (w not in ToVisit
                        or G[v][w]["weight"] < ToVisit[w]):
                    ToVisit[w] = G[v][w]["weight"]
                    Ancestor[w] = v
    return MST
```

# Выполнение алгоритма Прима



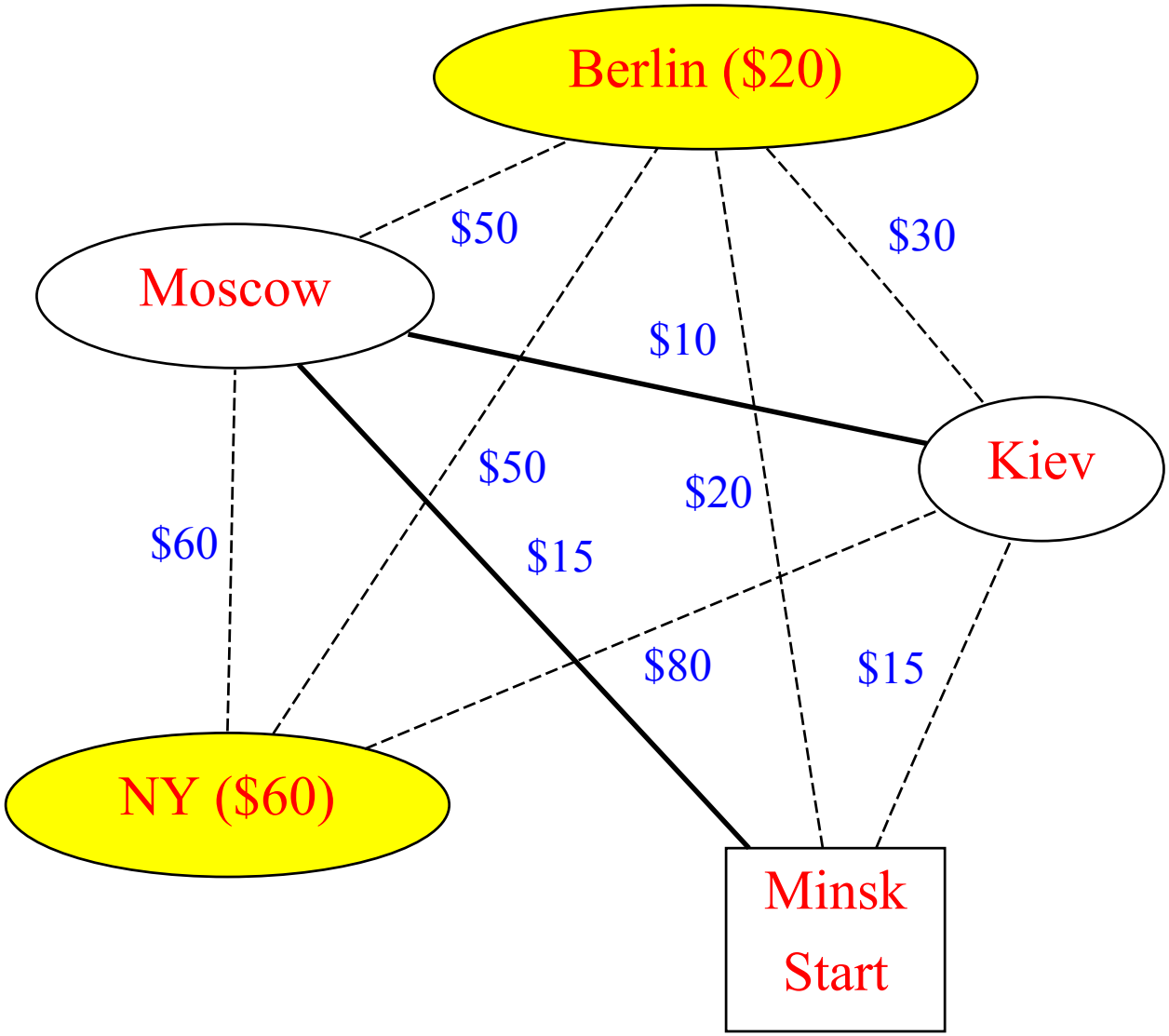

Итерация № 1 Стоимость MST: 0

# Выполнение алгоритма Прима



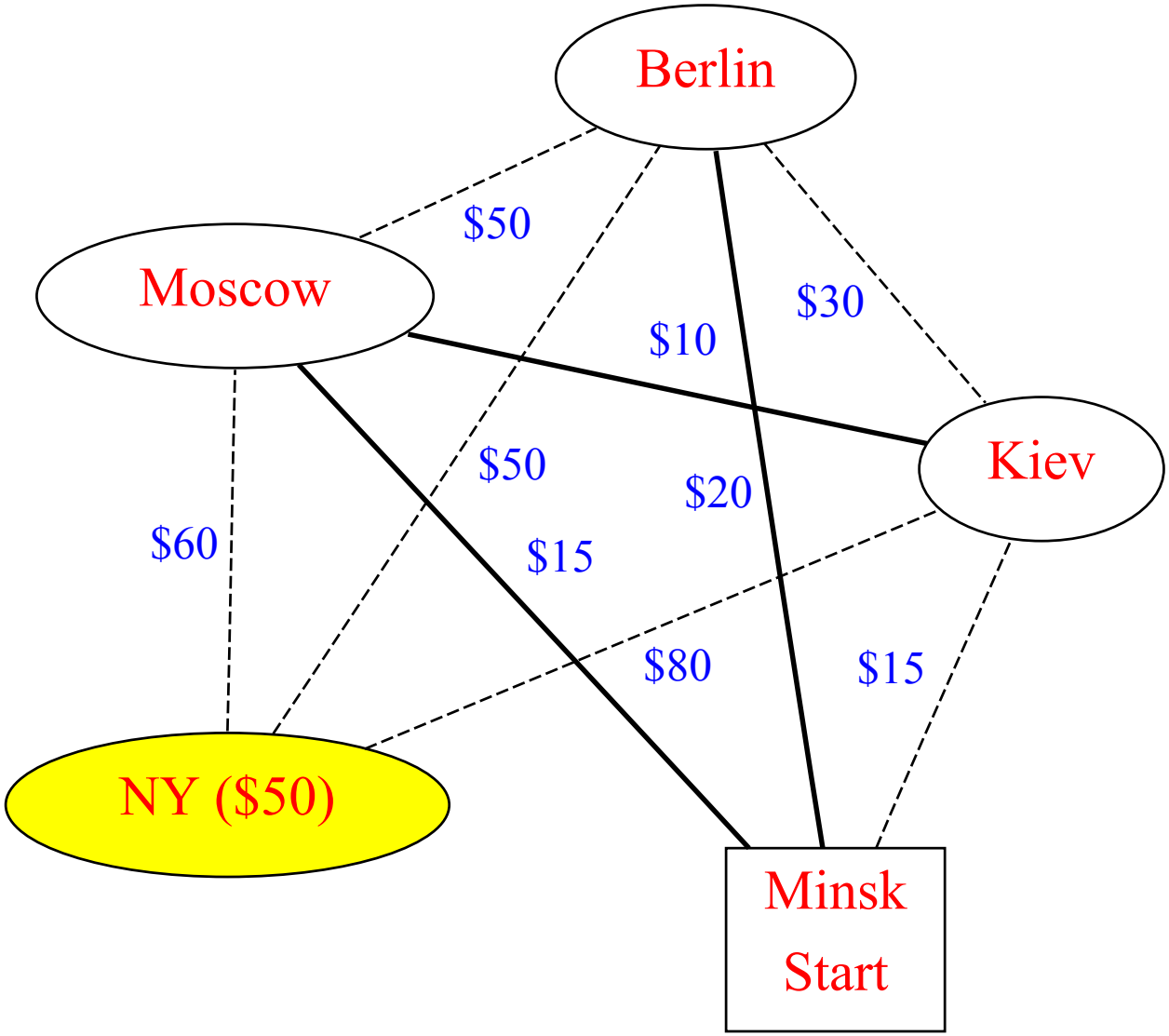

Итерация № 2 Стоимость MST: 15

# Выполнение алгоритма Прима



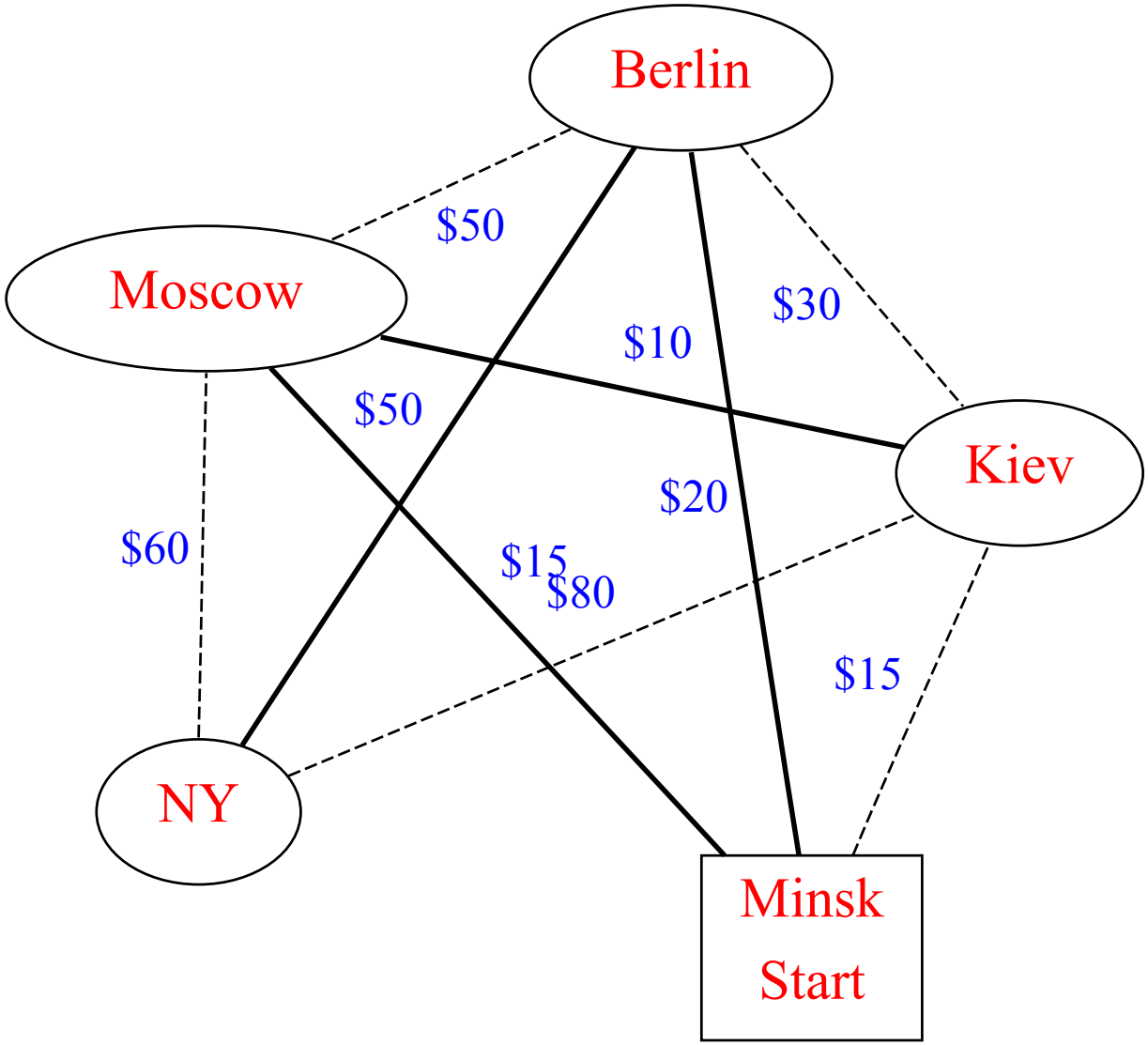

Итерация № 3 Стоимость MST: 25

# Выполнение алгоритма Прима




Итерация № 4 Стоимость MST: 45

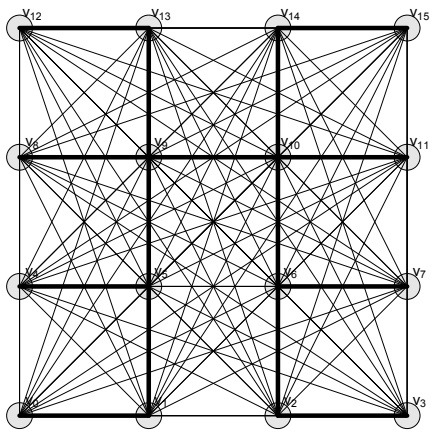
# Выполнение алгоритма Прима

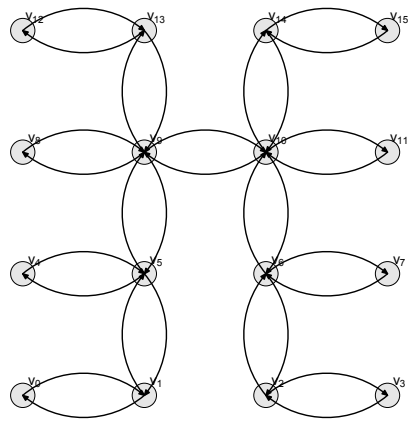


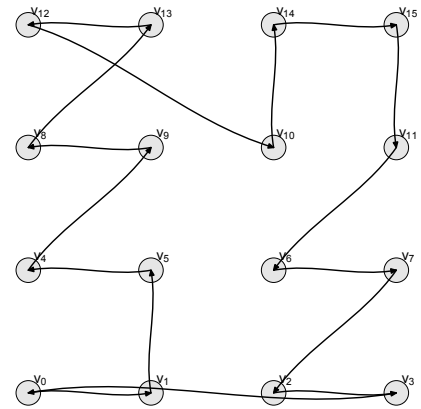

Итерация № 5 Стоимость MST: 95

# Приближенный алгоритм-1 для метрической «TSP»

1. Найти минимальное остовное дерево $T$ с матрицей весов $[d_{ij}]$.
2. Построить эйлеров граф $G$ и эйлеров обход в $G$, продублировав все ребра дерева $T$.
3. Из эйлерова маршрута (обхода) гамильтонов цикл строится путем последовательного вычеркивания вершин, встретившихся ранее.



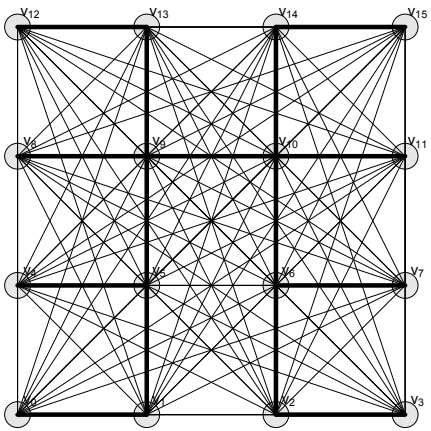


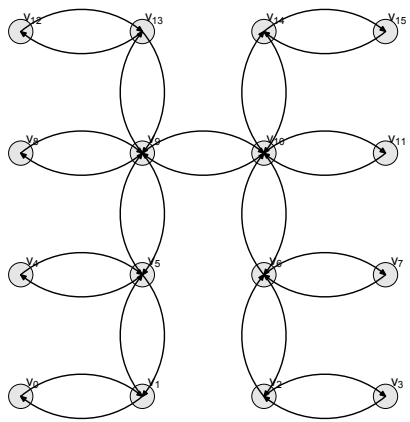


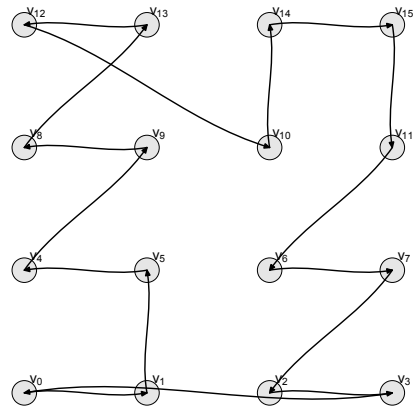
# Алгоритм-1 $2$-приближенный

## Доказательство.

1. Кратчайший гамильтонов цикл не меньше MST.
2. Длина эйлерова маршрута в $G$ равна двум MST.
3. Неравенство треугольника $\Rightarrow$ полученный гамильтонов цикл не длиннее эйлерова обхода $\Rightarrow$ не длиннее двух MST $\Rightarrow$ ...







## Определение

***Паросочетание***[a] *— подмножество ребер графа, такое, что никакие два ребра из этого подмножества не инцидентны какой-либо одной вершине.*

---

[a] *Matching* в англоязычной литературе.

## Определение

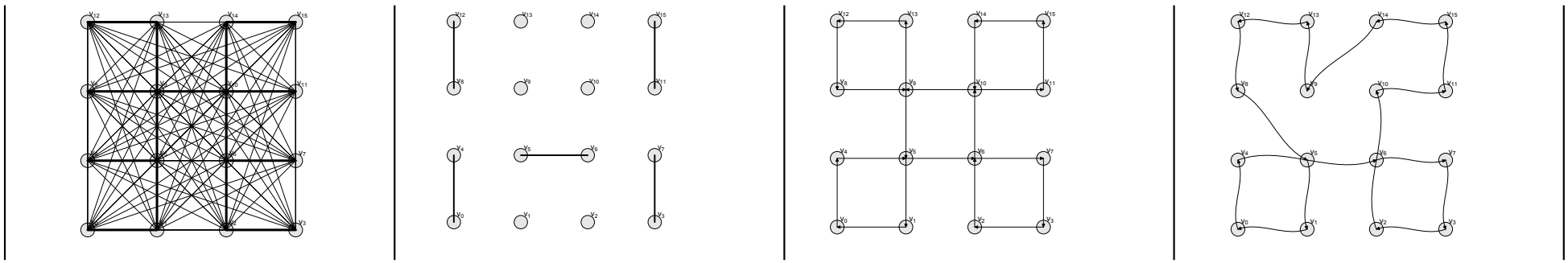
***Совершенное паросочетание***[a] *— паросочетание, покрывающее все вершины графа.*

---

[a] *Perfect matching* в англоязычной литературе.

# Алгоритм Кристофидеса для метрической «TSP»

1. Найти MST $T$.
2. $N(T)$ — вершины нечетной степени в $T$
3. $M$ — кратчайшее совершенное паросочетание с множеством вершин $N(T)$.
4. $G_E$ эйлеров граф с вершинами $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и ребрами $T \cup M$.
5. Найти эйлеров обход $P_E$ в $G_E$.
6. Построить гамильтонов цикл $P_H$ из $P_E$ последовательным вычеркиванием посещенных вершин.

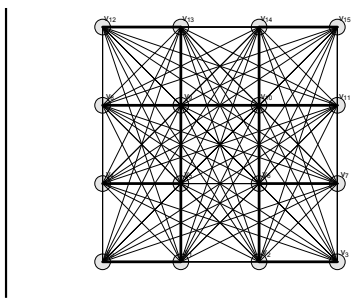
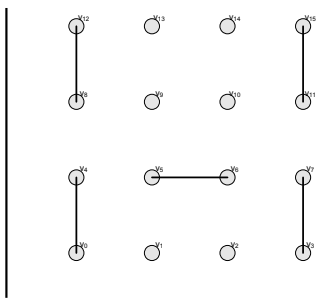
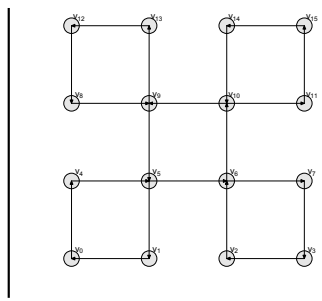
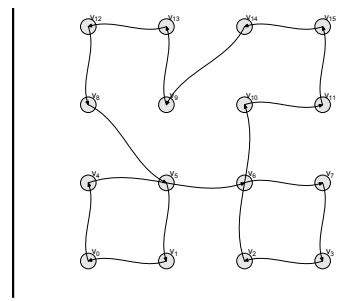


# Алгоритм Кристофидеса — $\frac{3}{2}$-приближенный

$G_E$ — эйлеров и связен. $P_H$ — результат. $P_H^*$ — оптимум. $c$ — стоимость

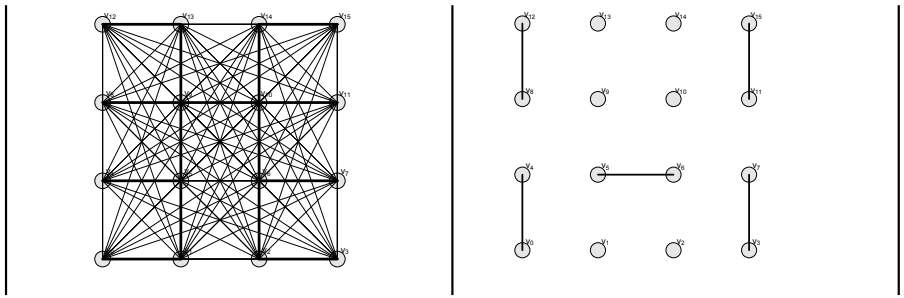
$$c(P_H) \leq c(P_E) = c(G_E) = c(T) + c(M).$$

$$c(T) \leq c(P_H^*) \leq c(P_H).$$

# Алгоритм Кристофидеса — $\frac{3}{2}$-приближенный

$i_1, i_2, \ldots, i_{2m}$ — вершины нечетной степени в $T$ (в порядке $P_H^*$).



Рассмотрим паросочетания:

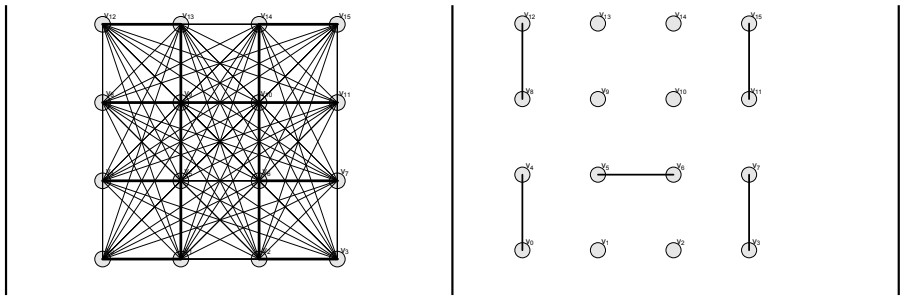
$$M_1 = \{i_1, i_2\},\ \{i_3, i_4\},\ \ldots,\ \{i_{2m-1}, i_{2m}\},$$
$$M_2 = \{i_2, i_3\},\ \{i_4, i_5\},\ \ldots,\ \{i_{2m}, i_1\}.$$

Из неравенства треугольника $\Rightarrow c(P_H^*) \geq c(M_1) + c(M_2)$.
$M$ — кратчайшее $\Rightarrow c(M_1) \geq c(M), c(M_2) \geq c(M)$.

$$c(P_H^*) \geq 2c(M) \ \Rightarrow\ c(M) \leq \frac{1}{2}c(P_H^*).$$

# Алгоритм Кристофидеса — $\frac{3}{2}$-приближенный

$i_1, i_2, \ldots, i_{2m}$ — вершины нечетной степени в $T$ (в порядке $P_H^*$).



Рассмотрим паросочетания:

$$M_1 = \{i_1, i_2\},\ \{i_3, i_4\},\ \ldots,\ \{i_{2m-1}, i_{2m}\},$$
$$M_2 = \{i_2, i_3\},\ \{i_4, i_5\},\ \ldots,\ \{i_{2m}, i_1\}.$$

Из неравенства треугольника $\Rightarrow c(P_H^*) \geq c(M_1) + c(M_2)$.
$M$ — кратчайшее $\Rightarrow c(M_1) \geq c(M), c(M_2) \geq c(M)$.

$$c(P_H^*) \geq 2c(M) \ \Rightarrow\ c(M) \leq \frac{1}{2}c(P_H^*).$$

$$c(P_H) \leq c(T) + c(M) \leq c(P_H^*) + \frac{1}{2}c(P_H^*) = \frac{3}{2}c(P_H^*).$$

# Интернет поддержка курса

`http://discopal.ispras.ru/`

Вопросы?